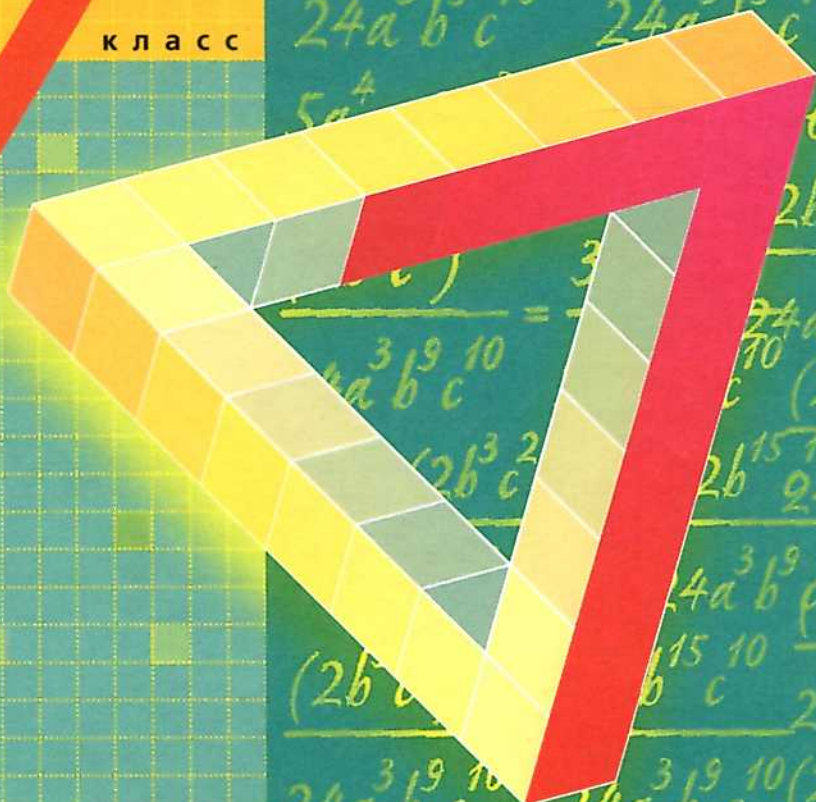


Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина

АЛГЕБРА

7

класс



ДРОФА

Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина

АЛГЕБРА

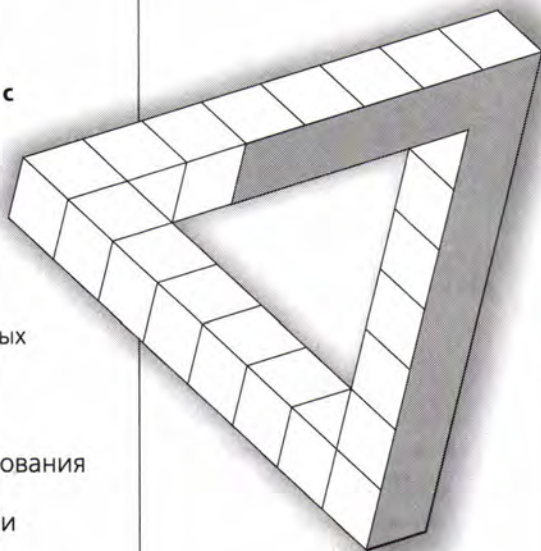
7

к л а с с

Учебник
для общеобразовательных
учреждений

Рекомендовано
Министерством образования
и науки
Российской Федерации

9-е издание, стереотипное



Москва

д р о ф а

2013

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
М91

Муравин, Г. К.

М91 Алгебра. 7 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / Г. К. Муравин, К. С. Муравин, О. В. Муравина. — 9-е изд., стереотип. — М. : Дрофа, 2013. — 285, [3] с. : ил.

ISBN 978-5-358-11925-3

Учебник является частью учебно-методического комплекса по математике для 5—11 классов. Теоретический материал, как и в предыдущих изданиях, разбит на обязательный и дополнительный, четко сформулированы алгоритмы решения стандартных задач, система упражнений дифференцирована по уровню сложности. Дополнительные материалы: практикум по решению текстовых задач, исследовательские работы, домашние контрольные работы и др. — помогут организовать разнообразную деятельность учащихся на уроке и дома.

Учебник (8-е издание) имеет новое художественное оформление.

Учебник рекомендован Министерством образования и науки Российской Федерации, включен в Федеральный перечень учебников.

**УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72**

ISBN 978-5-358-11925-3

© ООО «Дрофа», 1996
© ООО «Дрофа», 2011,
с изменениями

Оглавление

Глава 1. Математический язык

§ 1. Выражения	7
1. Числовые выражения	7
2. Сравнение чисел	14
3. Выражения с переменными	19
§ 2. Уравнения	28
4. Математическая модель текстовой задачи	28
5. Решение уравнений	36
6. Уравнения с двумя переменными и их системы	44

Глава 2. Функция

§ 3. Функции и способы их задания	52
7. Понятие функции	52
8. Таблица значений и график функции	56
§ 4. Функция $y = kx$	65
9. Пропорциональные переменные	65
10. График функции $y = kx$	71
§ 5. Линейная функция	76
11. Определение линейной функции	76
12. График линейной функции	79
13. График линейного уравнения с двумя переменными	86

Глава 3. Степень с натуральным показателем

§ 6. Степень и ее свойства	93
14. Тождества и тождественные преобразования	93
15. Определение степени с натуральным показателем	98
16. Свойства степени	103

§ 7. Действия со степенями	108
17. Одночлены	108
18. Сокращение дробей	111

Глава 4. Многочлены

§ 8. Произведение одночлена и многочлена	116
19. Понятие многочлена	116
20. Преобразование произведения одночлена и многочлена	122
21. Вынесение общего множителя за скобки	126
§ 9. Произведение многочленов	131
22. Преобразование произведения двух многочленов	131
23. Разложение на множители способом группировки	135
§ 10. Формулы сокращенного умножения	139
24. Квадраты суммы, разности и разность квадратов	139
25. Разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения	150

Глава 5. Вероятность

26. Равновероятные возможности	155
27. Вероятность события	158
28. Число вариантов	163

Глава 6. Повторение

29. Выражения	175
30. Функции и графики	182
31. Тожества	194
32. Уравнения и системы уравнений	199
Исследовательские работы	210
Практикум по решению текстовых задач	214
Проверь себя! Домашние контрольные работы	228
Ответы	234
Советы и решения	248
Справочные материалы	277
Список дополнительной литературы	283
Предметный указатель	285

Уважаемые семиклассники!

В этом году вы начинаете изучение школьного курса алгебры.

Алгебра — наука, возникшая в глубокой древности в Вавилоне и Египте. Слово «алгебра» происходит от арабского слова «альджебр». «Альджебр альмукабала» — так назывался труд знаменитого среднеазиатского ученого Мухаммеда из Хорезма (IX в.), написанный на арабском языке. В этом труде ученый систематизировал знания о решении уравнений, накопленные к тому времени учеными Греции, Индии, Армении и Арабского Востока. Альджебр — это прием решения уравнений, основанный на переносе членов из одной части уравнения в другую с противоположными знаками. При изучении математики в 5 и 6 классах вам уже приходилось пользоваться этим приемом. Теперь вам предстоит изучить алгебру, знание которой необходимо в физике, технике и других областях человеческой деятельности.

Алгебра — один из важнейших школьных предметов, и самое трудное в нем — научиться решать задачи. Авторы подготовили много интересных задач и постарались помочь вам научиться их решать.

В решении задач, номера которых не имеют обозначений, вы не должны испытать затруднений. Значком «○» отмечены задания, в которых путь к ответу, как правило, связан с небольшими техническими сложностями. Задачи, над которыми следует подумать, имеют обозначение «●», и, наконец, символом «*» обозначены наиболее трудные задачи.

Если у вас есть микрокалькулятор, то вы сможете выполнить специальные вычислительные задания, отмеченные значком «■».

Кроме основного материала, изучение которого обязательно, в учебнике помещен и дополнительный материал, знакомство с которым желательно. Начало дополнительного материала обозначается значком «▼», а конец — «▽».

В разделах «Ответы», «Советы и решения» вы найдете ответы к большинству заданий, а к некоторым из них — советы и даже решения. Решив задачу, сравните свой ответ с ответом в учебнике. Прочитайте совет по решению задачи или посмотрите ее решение. Но даже если наши ответы совпали, все равно полезно сравнить свое решение с решением в учебнике.

Каждый пункт учебника завершается контрольными вопросами и заданиями, а к каждой главе предлагается домашняя контрольная работа.

Если вы *можете* ответить на все контрольные вопросы, *справляетесь* со всеми контрольными заданиями и *выполнили* домашнюю контрольную работу, значит, материал вами усвоен.

Желаем вам успехов!

Авторы

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК

§ 1. Выражения

1. Числовые выражения

Алгебра — основа языка математики. В 5 и 6 классах вы уже немного научились «говорить» на этом языке. В нем, как и в русском языке, слова записываются с помощью букв. Однако в математическом языке используются не только сами буквы (как правило, латинские), но и числа, и знаки арифметических действий, а также скобки. Из них составляются выражения — слова математического языка.

Записи, составленные по некоторым правилам из чисел, знаков действий и скобок, называют *числовыми выражениями*. Правила, по которым составляются выражения, хорошо вам известны. Это в первую очередь правило порядка действий, по которому сначала выполняются действия в скобках, затем возведение в степень, умножение или деление и, наконец, сложение или вычитание.

Запишем несколько числовых выражений:

$$1,42 + 3,6 \cdot 0,8; \quad \frac{2}{5} - 7; \quad 3 \cdot 2^5; \quad 80 - 0,4 \cdot 5^2;$$

$$(12,7 - 10,2)(0,83 + 3,37); \quad \frac{1,25 \cdot 0,08}{13,2 - 13,7}.$$

Если в любом из этих выражений выполнить указанные действия, то получится число, которое называют *значением числового выражения*. Найдем значения некоторых из записанных выражений.

 **Пример 1.** Вычислить $(12,7 - 10,2)(0,83 + 3,37)$.

Решение. Сначала выполняем действия в скобках:

$$1) 12,7 - 10,2 = 2,5; \quad 2) 0,83 + 3,37 = 4,2.$$

Затем перемножаем полученные числа:

$$3) 2,5 \cdot 4,2 = 10,5.$$

Примечание. Умножение на 2,5 удобно заменить двумя более простыми действиями: умножением на 10 и делением на 4, так как $2,5 = \frac{10}{4}$.

Чтобы прочитать выражение, нужно определить, какое действие при вычислении значения выражения выполняется последним. Если последнее действие сложение, то выражение называют *суммой*, если вычитание, то *разностью*, если умножение (деление, возведение в степень), то *произведением* (*частным*, *степенью*).

В рассмотренном примере последним действием было умножение, значит, выражение $(12,7 - 10,2)(0,83 + 3,37)$ можно прочитать так: произведение разности чисел 12,7 и 10,2 на сумму чисел 0,83 и 3,37.

 **Пример 2.** Найти значение выражения $80 - 0,4 \cdot 5^2$.

Решение.

$$1) 5^2 = 25; \quad 2) 0,4 \cdot 25 = 10; \quad 3) 80 - 10 = 70.$$

Данное выражение является разностью числа 80 и произведения числа 0,4 на квадрат числа 5.

Примечание. Часто оказывается удобным читать выражение не по правилам, а так, как оно записано, например, $80 - 0,4 \cdot 5^2$: *восемьдесят минус ноль целых четыре десятых умножить на пять в квадрате*.

 **Пример 3.** Вычислить $\frac{1,25 \cdot 0,08}{13,2 - 13,7}$.

Решение. Это выражение — частное произведения чисел 1,25 и 0,08 и разности чисел 13,2 и 13,7.

$$\frac{1,25 \cdot 0,08}{13,2 - 13,7} = \frac{0,1}{-0,5} = -0,2.$$

Как вы знаете, деление на ноль невозможно, поэтому, например, у дроби $\frac{100 - 5,8 \cdot 16,5}{9 \cdot 8 - 72}$, знаменатель которой равен нулю, нет значения. Говорят, что выражение $\frac{100 - 5,8 \cdot 16,5}{9 \cdot 8 - 72}$ не имеет смысла.

К правилам, по которым составляются выражения, относится и запрет на использование подряд двух знаков арифме-

тических действий. Так, например, поскольку минус как знак действия и минус как знак числа записываются одинаково, то нельзя записать разность чисел 5 и -3 без скобок: $5 - -3$, а следует взять вычитаемое в скобки: $5 - (-3)$.

■ Заметим, что при работе с *микрокалькулятором*, который используется для упрощения вычислений, различают знак числа и знак действия. Поэтому чтобы ввести число -3 , сначала вводят 3, а затем нажимают клавишу перемены знака «+/-» (третья слева в нижнем ряду на рисунке ¹).

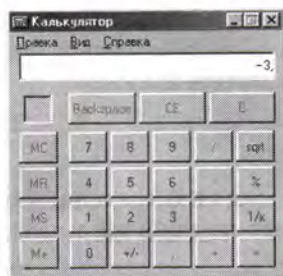


Рис. 1

Работая с калькулятором, следует помнить, что он выполняет вычисления по действиям и, в отличие от нас, «не знает» правила порядка действий. Если, например, вы нажмете кнопки в следующем порядке: « $4 + 3 * 2 =$ », то на дисплее калькулятора появится число 14, а не значение выражения $4 + 3 * 2$, равное 10. Программа вычисления на калькуляторе значения выражения $5,17 + 3,4 : 2,7$ выглядит так: « $3,4 / 2,7 + 5,17 =$ ». Запись числа в этой программе означает, что число *вводится* в калькулятор. Выполнив программу, получим на индикаторе число $6,42925... \approx 6,43$ ($6,43$ — значение выражения с точностью до $0,01$). ■

Числовые выражения часто получаются в результате перевода на математический язык текстов некоторых задач.

✓ **Пример 4.** От пункта *A* по течению реки отправился плот. Через 2 ч из пункта *B*, расположенного в 20 км ниже по реке, в пункт *A* вышел катер. Через какое время катер встретит плот, если скорость катера в стоячей воде 8 км/ч, а скорость течения реки 4 км/ч?

Решение. Поскольку скорость плота равна скорости течения реки (рис. 2), то к моменту отхода катера плот прошел $4 \cdot 2$ (км), и расстояние между ними стало $20 - 4 \cdot 2$ (км). Скорость сближения катера и плота равна

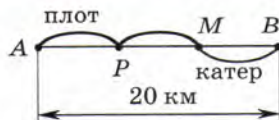


Рис. 2

¹ Здесь и далее рассматривается калькулятор популярной операционной системы Windows.

скорости катера в стоячей воде, т. е. 8 км/ч. Составим числовое выражение для определения времени сближения катера с плотом и найдем его значение:

$$\frac{20 - 4 \cdot 2}{8} = \frac{12}{8} = 1,5 \text{ (ч)}.$$

О т в е т: катер встретит плот через полтора часа после своего выхода из пункта В.

П р и м е ч а н и е. Обычно в решении текстовых задач вспомогательные рассуждения подробно не записывают и стараются как можно быстрее составить выражение.

Упражнения

1. Прочитайте выражение и найдите устно его значение:

1) $6,5 \cdot 100 + 0,3 \cdot 10$;	5) $6,73 \cdot (23,1 - 22,1)$;
2) $(8 + 4,3) : 100$;	6) $5,6 : 8 \cdot 0$;
3) $0 - 1,25 \cdot 8$;	7) $0 : 52 - 427$;
4) $(0 - 4) : 1,25$;	8) $10 - 0,25 \cdot 4$.
2. (Устно.) Какие из следующих выражений не имеют смысла:
 - 1) $\frac{7,8^2 - 15,6}{4,18 - 2,09 \cdot 2}$;
 - 2) $(13,2 \cdot 3 - 39,6) : (0,83 + 0,17)$;
 - 3) $\frac{147 : 0,7 - 252 \cdot 0,6}{(6 + 5)^2 - 6^2 - 5^2}$;
 - 4) $(283 \cdot 1,42) : (3^2 + 4^2 - 5^2)$?
3. Даны два числа 37,5 и -12,5. Запишите:
 - 1) произведение суммы данных чисел и большего из них;
 - 2) произведение разности данных чисел на меньшее из них;
 - 3) сумму большего из данных чисел и их частного;
 - 4) разность меньшего из данных чисел и их произведения;
 - 5) частное суммы данных чисел и их разности;
 - 6) квадрат частного данных чисел.
4. Запишите в виде числового выражения:
 - 1) произведение 0,12 и суммы чисел $\frac{5}{8}$ и $\frac{1}{4}$;

2) частное 2,12 и разности чисел $2\frac{19}{25}$ и $3\frac{8}{15}$;

3) произведение суммы чисел $1\frac{10}{21}$ и 2,5 на частное чисел 35 и 0,625;

4) частное суммы чисел $1\frac{2}{7}$ и 1,2 и разности чисел 1,1 и $\frac{2}{7}$.

5. Вычислите:

1) $0,3 \cdot 3,5^2 - 3,7$;

2) $\frac{3}{4} : 9 + (0,732 - 0,75) : 0,009$;

3) $2\frac{4}{13} : \left(-\frac{15}{26}\right) - 3,75 \cdot 2$;

4) $481,92 : 12 - 25,16$;

5) $2\frac{11}{17} \cdot 2\frac{4}{15} - (13,7 \cdot 1,5 - 21,55)$;

6) $\left(\frac{3}{20} + 4\frac{1}{15}\right) + \frac{25}{42} \cdot 2,1$.

6. Вычисляя значение одного и того же числового выражения, два ученика получили в ответе разные числа. Может ли оказаться, что:

1) оба ответа верные;

2) оба ответа неверные;

3) один из ответов правильный;

4) по крайней мере, один из учеников ошибся;

5) по крайней мере, один из учеников не ошибся?

7. 1) Вычислите наиболее простым способом:

а) $(0,72 + 0,54) : 9 - 0,7 \cdot 0,2$;

б) $\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6}\right) \cdot 6 - (2,71 + 7,29) \cdot 0,3$;

в) $56,43 - 8,987 - (6,43 - 8,987)$;

г) $\frac{2}{11} \cdot 0,25 \cdot 121 \cdot 40 \cdot \frac{1}{5}$;

д) $1,4 \cdot 47 - 14 \cdot 5,7$;

е) $246 \cdot 0,37 + 130 \cdot 0,246$.

2) Какими свойствами арифметических действий вы воспользовались при вычислениях?

8. 1) Вычислите с помощью микрокалькулятора:

а) $0,4455 \cdot (-0,123)$;

б) $-678,50586 - 165,57$;

- в) $-173,4831 : (-12,33)$;
г) $67,92 - 45,78 \cdot 59,345 + 98,771$;
д) $27,342 + (4,2 \cdot 6,834^2 - 728)$;
е) $4,036 - (6,347 - 9,738)^3 : 3,2$.
2) Составьте программу вычислений.

9. 1) Запишите числовое выражение по данной программе вычисления его значения:

- а) $3,673 \cdot 3,673 - 1,81 / 13$;
б) $88,435 / 15 + 27,5 / 3,7 \cdot 4,2$;
в) $56,12 + 34,79 \cdot 3,52 - 5,236$;
г) $6,31 \cdot = = \cdot 9,02 + 5,03 / 3,64$.

2) Вычислите с помощью калькулятора значение этого выражения с точностью до сотых.

10. Запишите какое-либо числовое выражение, при вычислении значения которого нужно последовательно выполнить действия:

- 1) деление, сложение и умножение;
- 2) умножение, вычитание и деление;
- 3) сложение, возведение в куб и вычитание;
- 4) умножение, возведение в квадрат и сложение.

11. 1) Запишите, используя три цифры 3 и, если нужно, знаки действий и скобки, числовое выражение, значение которого равно:

- а) 0; в) 3; д) 6; ж) 18;
б) 2; г) 4; е) 11; з) 30.

2) Какие еще числа вы можете получить?

12. Составьте числовое выражение по условию задачи и найдите его значение.

1) Из двух городов, расстояние между которыми 60 км, одновременно навстречу друг другу выезжают два велосипедиста: один со скоростью 12 км/ч, другой со скоростью 10 км/ч. Какое расстояние будет между ними через 2 ч?

2) Из пунктов А и В одновременно навстречу друг другу вышли два пешехода: один со скоростью 4,5 км/ч, другой со скоростью 5,5 км/ч. Через 3 ч после выхода им оставалось до встречи еще 8 км. Сколько километров между пунктами А и В?

3) Один экскаватор за 4 ч вынимает 1000 м^3 грунта, а другой за 5 ч — 1200 м^3 . За сколько часов совместной работы оба экскаватора выкопают котлован, если при этом понадобится вынуть $19\,600 \text{ м}^3$ грунта?

4) Один токарь изготавливает 105 деталей за 5 ч, а другой — 72 детали за 3 ч. Сколько деталей изготовят оба токаря за 8 ч?

5) ○ Машинистка в первый день перепечатала 20% рукописи, а во второй день — 25% всей рукописи. Сколько страниц рукописи перепечатала машинистка в первый день, если после двух дней работы ей осталось отпечатать еще 220 страниц?

6) ○ Туристы 30% своего маршрута прошли пешком, 25% проплыли на байдарках, а остальной путь проехали в автобусе. Сколько километров туристы проехали в автобусе, если весь маршрут составил 600 км?



13. 1) Какие из следующих утверждений верны:

- а) сумма двух любых натуральных чисел есть число натуральное;
- б) разность любых двух натуральных чисел есть число натуральное;
- в) произведение любых двух натуральных чисел есть число натуральное;
- г) частное любых двух натуральных чисел есть число натуральное;
- д) квадрат любого числа является положительным числом?

2) Если вы не согласны с каким-либо утверждением, приведите *контрпример* (пример, опровергающий это утверждение).

14. Ответьте на вопросы. Утвердительный ответ подтвердите примером. Отрицательный ответ объясните.

- 1) Может ли сумма двух дробных чисел быть целым числом?
- 2) Может ли произведение двух дробных чисел быть целым числом?
- 3) Может ли сумма целого и дробного чисел быть целым числом?

15. Сколько натуральных двузначных чисел можно составить из цифр:
 1) 2 и 0; 2) 1 и 2; 3) 1, 2 и 3; 4) 5, 6 и 0?
16. 1) В выражении $36 : 3 + 3 \cdot 3$ расставьте всеми возможными способами две пары скобок.
 2) Найдите значения полученных выражений. В каком выражении значение получилось наибольшее?
17. Пифагору приписывается следующее открытие: «Всякое нечетное число, кроме единицы, есть разность двух квадратов натуральных чисел». Проверьте это утверждение для всех нечетных чисел от 3 до 15.

! Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример числового выражения, не имеющего смысла.
2. Составьте программу вычисления значения выражения $3,892 + 901,34 - 5,97^2$ с помощью микрокалькулятора.
3. Прочитайте числовое выражение $17,1 : 0,2 - 2\frac{3}{7} \cdot 3,5$ и найдите его значение.
4. Составьте числовое выражение, содержащее действия: сложение, вычитание и умножение, так, чтобы последним надо было выполнять умножение.

2. Сравнение чисел

В математическом языке, как и в русском языке, обычно составляют предложения. Как правило, математические предложения являются повествовательными. В каждом из них что-нибудь утверждается, например, что $2 \cdot 2 = 4$ или что $3 \cdot 9 + 2 > 30$. Первое из приведенных утверждений верно, или, как говорят математики, *истинно*, а второе — неверно, *ложно*.

Знак равенства « $=$ » и знаки неравенств « $<$ », « $>$ », « $\leq$ », « $\geq$ » наиболее часто используются в формулировках математических утверждений. В зависимости от использованного знака и сами утверждения называют *равенствами* или *неравенствами*.

Вы знаете, что если число a не равно числу b ($a \neq b$), то оно либо больше b ($a > b$), либо меньше b ($a < b$). На координатной прямой, где числа изображаются точками, большее из чисел располагается правее. Из расположения чисел a и b на координатной прямой (рис. 3) можно сделать вывод о том, что число a больше, чем число b .



Рис. 3



Рис. 4

Положительные числа на координатной прямой изображаются точками, расположенными справа, а отрицательные — слева от точки O , изображающей нуль. На рисунке 4 на координатной прямой показаны точки, изображающие числа -3 и 5 . Первое из них находится слева от точки O на расстоянии 3 единицы, а второе — справа от точки O на расстоянии 5 единиц. Напомним определение модуля числа.

Расстояние на координатной прямой от точки, изображающей число b , до точки O называют **модулем числа b** и обозначают $|b|$.

Значит, $|-3| = 3$, а $|5| = 5$. Вообще, модуль положительного числа равен самому числу, модуль отрицательного числа противоположен самому числу, а модуль нуля считают равным нулю.

Упражнения

18. 1) Верны ли утверждения:

а) $45,74 \cdot \frac{2}{7} \cdot 0 \cdot (-0,2) = 0$;

б) $\frac{5}{3} \cdot (-9) \cdot (-5) < 0$;

в) $\left| -\frac{13}{15} \right| > -\frac{13}{15}$;

г) $|-7,43| < |7,43|$;

д) $2,5 \cdot (8,3 - 1,9) = 2,57 \cdot 8,3 - 2,5 \cdot 1,9$;

е) $\frac{6}{11} : \left(-\frac{2}{9} \right) \cdot 3,1 < 0$?

2) Какие из этих утверждений являются равенствами, а какие — неравенствами?

19. Сравните числа:

- 1) 0,6143 и 0,614; 5) 1 и $\frac{98}{97}$; 9) 3,12 и $2\frac{12}{11}$;
2) 1,819 и 1,82; 6) $\frac{5}{7}$ и $\frac{7}{9}$; 10) -4,87 и 0;
3) $\frac{15}{17}$ и $\frac{15}{19}$; 7) 0,37 и $\frac{3}{7}$; 11) $-\frac{13}{23}$ и -0,01;
4) -23,47 и -23,6; 8) $\frac{13}{121}$ и $\frac{17}{121}$; 12) 2,3 и -4.

20. Сравните значения выражений, не выполняя вычислений:

- 1) $2,52 \cdot 0,63$ и $2,52 : 0,63$;
2) $40,3 \cdot 2,4$ и $40,3 : 2,4$;
3) $5,1 \cdot (-17)$ и $-5,1 \cdot 17$;
4) $11,7 \cdot (-1,3)$ и $11,7 : (-1,3)$;
5) $(-22,5) \cdot (-256)$ и $-22,5 : (-265)$;
6) $-1,447 : (0,72)$ и $-1,447 \cdot (-0,72)$.

21. Запишите, используя знак равенства или знаки неравенств, что:

- 1) число -4,5 больше -5,4;
2) число -8,5 меньше 0;
3) модуль числа -7,4 равен 7,4;
4) модуль числа нуль равен нулю;
5) число 1,2 больше 1,1 и меньше 1,3;
6) число 0 больше -1 и меньше 1.

22. Найдите какое-нибудь число x , удовлетворяющее условию $a < x < b$:

- 1) $a = 0,83$, $b = 0,84$; 5) $a = -0,76$, $b = -0,7$;
2) $a = 0,241$, $b = 0,242$; 6) $a = -1,23$, $b = 1,3$;
3) $a = \frac{15}{17}$, $b = \frac{16}{17}$; 7) $a = -\frac{13}{21}$, $b = -\frac{13}{22}$;
4) $a = \frac{7}{9}$, $b = \frac{8}{9}$; 8) $a = \frac{19}{31}$, $b = -\frac{19}{32}$.

23. 1) Запишите, используя знаки неравенств, что:

- а) сумма чисел 0,617 и -0,384 — положительное число;
б) разность чисел -1,3 и -0,81 — отрицательное число;
в) произведение чисел -0,65 и -0,72 — положительное число;
г) частное чисел 129 и -0,075 — отрицательное число.
2) Проверьте, верные ли получились неравенства.

24.○ Определите, какая из дробей больше:

1) $\frac{89}{112}$ и $\frac{74}{97}$, сравнивая их с единицей;

2) $\frac{22}{45}$ и $\frac{36}{70}$, сравнивая их с $\frac{1}{2}$;

3) $\frac{7 \cdot 15 \cdot 48}{25 \cdot 49 \cdot 24}$ и $\frac{8 \cdot 81 \cdot 59}{59 \cdot 45 \cdot 16}$, предварительно их сократив.

25.○ Запишите дроби в порядке убывания:

1) $\frac{16}{30}$, $\frac{26}{50}$, $\frac{36}{70}$;

2) $\frac{17}{32}$, $\frac{23}{44}$, $\frac{29}{56}$.

26.○ Сравните значения выражений:

1) $\frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{5}{6}$ и $\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$; 2) $\frac{3}{5} + \frac{5}{7} - \frac{3}{14}$ и $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$.

27.■ Используя микрокалькулятор, сравните значения выражений:

1) $17,45 \cdot 1,526$ и $19,87 : 0,7462$;

2) $0,04938 \cdot 619,3$ и $2,2471 : 0,073481$;

3) $(0,7643 - 0,0831) : 0,319$ и $(0,5968 + 0,7314) \cdot 1,608$;

4) $(1,4395 + 0,71524) \cdot 108,3$ и $(58,45 + 91,435) : 0,6425$.

28. Как изменится площадь прямоугольника, если:

1) одно из его измерений увеличить в 6 раз;

2) одно из его измерений уменьшить в 2 раза;

3)○ одно из его измерений увеличить в 9,6 раза, а другое уменьшить в 3 раза;

4)○ оба измерения увеличить в 5 раз;

5)○ оба измерения уменьшить в 5 раз?

29.○ Как изменится:

1) площадь квадрата, если его сторону увеличить в 8 раз;

2) объем куба, если его ребро уменьшить в 4 раза;

3) длина окружности, если ее радиус уменьшить в 14 раз;

4)● длина окружности, если ее радиус увеличить на 7 см?

30.○ 1) Уменьшите число 20 на: а) 16%; б) 25%; в) 73%.

2) Увеличьте число 30 на: а) 5%; б) 17%; в) 75%.

31.○ Сравните: 1) $\frac{3}{4}$ числа 60 и 23% числа 200;

2) $\frac{7}{9}$ числа 108 и 28% числа 300.

32. На координатной прямой (рис. 5) указаны числа a и b .

1) Укажите точками на этой же координатной прямой

числа: $-a$, $-b$, $2a$, $2b$, $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}b$.

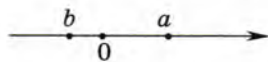


Рис. 5

2) Какое число больше: $2a$ или $\frac{1}{2}a$?

3) Какое число имеет больший модуль — b или $2b$?

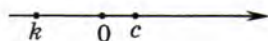


Рис. 6

33. На координатной прямой (рис. 6) указано положение точек с координатами c и k .

1) Укажите точки, координаты которых равны $c + k$ и $c - k$.

2) Какое из чисел больше — $c + k$ или $c - k$?

3) Какое из этих чисел имеет больший модуль?

34. Можно ли установить, какое из чисел больше, если:

1) модуль одного числа больше, чем модуль другого;

2) модуль одного из двух отрицательных чисел больше, чем модуль другого?

35. Ответьте на вопросы. В случае утвердительного ответа на вопрос приведите пример. Отрицательный ответ объясните.

1) Может ли сумма двух чисел быть больше одного слагаемого, но меньше другого?

2) Может ли сумма двух чисел быть меньше каждого слагаемого?

3) Может ли произведение двух чисел быть меньше каждого множителя?

4) Может ли сумма двух чисел быть больше их произведения?

5) Может ли сумма двух чисел быть равной их произведению?

36. 1) К некоторому числу прибавили число 100. Можно ли утверждать, что его модуль увеличился?

2) Из некоторого числа вычли число 100. Можно ли утверждать, что его модуль уменьшился?

37. 1) Я задумал число. Прибавил к нему число 10 и заметил, что при этом модуль числа не изменился. Какое число я задумал?

2) Я задумал число. Вычел из него 24 и получил число с тем же модулем, что и задуманное. Какое число я задумал?

- 38.** Где на координатной прямой может быть расположено число a , если:
- 1) $|a| > |a + 6|$; 2) $|a| < |a - 7|$?
- 39.** Выпишите все целые числа x , удовлетворяющие двойному неравенству (n, k, t, m — целые числа):
- 1) $n < x < n + 2$; 3) $t - 2 < x < t + 2$;
2) $k - 1 < x < k + 1$; 4) $m - 1 < x < m + 4$.
- 40.** Запишите целое число, которое:
- 1) предшествует целому числу $2k$;
2) следует за целым числом $3n - 2$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение модуля числа. Приведите пример неравных чисел, имеющих один и тот же модуль. Как называют такие числа?
2. Можно ли по изображению двух чисел на координатной прямой, не обращая внимания на положение точки O , установить: 1) какое из чисел больше; 2) какое из чисел имеет больший модуль?
3. Запишите, используя знак неравенства, что произведение чисел $-0,527$ и $-1,8$ больше их суммы. Верно ли это неравенство?

3. Выражения с переменными

В предыдущем пункте, говоря о сравнении чисел a и b , мы использовали буквы, так как речь шла не о каких-то конкретных, а о произвольных числах. В математике буквы часто используют, чтобы указать, какие вычисления нужно выполнять для получения ответа на тот или иной вопрос. Так, например, при составлении выражения для площади прямоугольника, одна из сторон которого на 2 больше другой, можно обозначить длину меньшей из сторон прямоугольника буквой a и получить для площади прямоугольника выражение $a(a + 2)$. Это выражение позволяет найти площадь любого из прямоугольников с указанным соотношением между смежными сторонами по его меньшей стороне. Например, если $a = 9$, то, *подставив* в выражение $a(a + 2)$ вместо a число 9, получим $9(9 + 2) = 99$. Если $a = 28$, то $28(28 + 2) = 840$. Рассмотрение разных прямоугольников приводит к изменению

значений, которые подставляются вместо a . Говорят, что буквой a обозначена переменная, и называют выражение $a(a + 2)$ *выражением с переменной*.

Как и числовые выражения, так и выражения с переменными читают по последнему действию. Так, например, при вычислении значения выражения $a(a + 2)$ при любом значении a первым действием является сложение, а последним — умножение, значит, данное выражение является произведением переменной a на ее сумму с числом 2.

Часто встречаются выражения с несколькими переменными. Так, произведение переменных a и b выражает площадь прямоугольника со сторонами a и b : $S = ab$.

Рассмотрим выражения:

$$1) a^2 - 3a + 7; \quad 2) \frac{3x + 5}{x - 8}; \quad 3) ab + 2a - 3b.$$

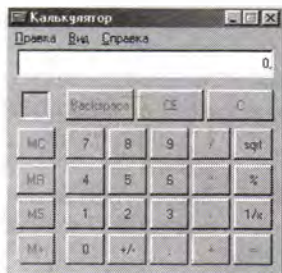
Значения выражений 1) и 3) можно вычислить при любых значениях входящих в них переменных.

Говорят, что для таких выражений *допустимы* любые значения переменных. А в выражении 2) допустимыми являются любые значения x , кроме $x = 8$, при котором знаменатель дроби обращается в нуль.

■ При выполнении вычислений на микрокалькуляторе иногда приходится запоминать промежуточные результаты. У микрокалькулятора для запоминания и воспроизведения результатов имеются специальные клавиши MS и MR. Можно записать, например, программу вычисления на микрокалькуляторе значения выражения 2):

« $x - 8 = \text{MS}$ $3 * x + 5 / \text{MR} =$ », где буква x обозначает введение значения переменной x . Вычисляя по этой программе значение выражения 2) при $x = 3,5$ с точностью до сотых, получим $-3,44$. ■

Иногда в текстовых задачах некоторые из числовых значений заменены буквами. Перевод таких задач на математический язык приводит к выражениям с переменными.



✓ **Пример.** На одном станке обрабатывают n деталей за 3 ч, а на другом — 12 деталей за m ч. Сколько деталей обрабатывают на обоих станках за t ч?

Решение. В задачах на работу обычно находят производительность, т. е. количество единиц продукции, выпускаемой в единицу времени. Производительность первого станка равна $\frac{n}{3}$ деталей за 1 ч, а производительность второго станка — $\frac{12}{m}$ деталей в час. Совместная производительность станков, т. е. число деталей, которые обрабатывают за 1 ч на первом и втором станках вместе, равна $\frac{n}{3} + \frac{12}{m}$. Теперь можно записать выражение, отвечающее на вопрос задачи:

$$\left(\frac{n}{3} + \frac{12}{m}\right) \cdot t.$$

Упражнения

41. Прочитайте выражение:

- | | | | |
|----------------------|----------------------|--------------------------|--------------------------|
| 1) $2ac$; | 4) $(ab)^3$; | 7) $cy - n$; | 10) $a^2 + x^2$; |
| 2) $\frac{x+y}{2}$; | 5) $\frac{3-x}{a}$; | 8) $a^2 - \frac{x}{y}$; | 11) $\frac{p}{k} - np$; |
| 3) a^3b^3 ; | 6) $x(x-y)$; | 9) $a+bc$; | 12) $(a+x)^2$. |

42. Укажите допустимые значения переменной в выражении:

- | | | | |
|--------------------------|-------------------------|--------------------------|----------------------------------|
| 1) $9c + 77$; | 3) $\frac{3a-5}{a+6}$; | 5) $\frac{2b-9}{3b+1}$; | 7) $\frac{5}{y} - \frac{y}{2}$; |
| 2) $\frac{4b+7}{b-11}$; | 4) $\frac{2d+4}{3}$; | 6) $\frac{c+4}{8c-4}$; | 8) $x^2 - 7x - 1$. |

43. Сравните значения выражений:

- а) при положительных;
- б) при отрицательных значениях переменной:
- | | |
|-------------------------------------|--|
| 1) $a + 4,35$ и $a + 5$; | 4) $b - 5,7$ и $b - 5,74$; |
| 2) $b \cdot 0,24$ и $b \cdot 0,4$; | 5) $k \cdot \frac{11}{13}$ и $k : \frac{11}{13}$; |
| 3) $c : 0,34$ и $c : 0,342$; | 6) $t : \frac{7}{5}$ и $t \cdot \frac{7}{5}$. |

44. Сравните значения выражений:

- 1) $\left(x + \frac{5}{6}\right)\left(x - \frac{5}{6}\right)$ и $x + \frac{5}{6}\left(x - \frac{5}{6}\right)$ при $x = \frac{4}{9}$;
- 2) $-0,4(y + 0,4)$ и $(y - 0,4)y + 0,4$ при $y = 0,5$.

45. Найдите значение выражения:

- 1) $8a + 120$ при $a = -9$;
- 2) $5c - 111$ при $c = -4$;
- 3) $5,71x - 0,71x$ при $x = 0,09$;
- 4) $1,42y + 0,38y$ при $y = -100$;
- 5) $\frac{13}{16} - \left(c - \frac{3}{4}\right)$ при $c = \frac{9}{16}$;
- 6) $2b + \frac{5}{21} - \frac{17}{35}$ при $b = \frac{11}{35}$;
- 7) $12(2x + 3y)$ при $x = \frac{2}{3}, y = \frac{3}{4}$;
- 8) $(14a - 63b) : 7$ при $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{18}$.

46. Найдите значение выражения:

- 1) $a^2 - 3a + 4$ при $a = 1,5$;
- 2) $x^2 + 4x - 1,75$ при $x = -2,5$;
- 3) $3b^2 + 2b - 1$ при $b = \frac{1}{3}$;
- 4) $5c^2 - 4c + 0,6$ при $c = -\frac{2}{5}$;
- 5) $\frac{y^2 + 2y}{3y - 1}$ при $y = 0,3$;
- 6) $\frac{0,6 - 2p}{p^2 + 0,01}$ при $p = -0,7$.

47. Заполните таблицу.

1)

x	-6	-5	-3	0	3	5	6
$x^2 - 20$							

2)

x	-7	-5	-2	0	2	5	7
$40 - x^2$							

3)

x	-6	-5	-3	0	3	5	6
$x^2 - 1,37$							

4) 

x	-6	-5	-3	0	3	5	6
$2,14 + x^2$							

48. Запишите в виде выражения:

- 1) число минут в a ч;
- 2) число минут в b с;
- 3) число метров в c км;
- 4) число килограммов в d г;
- 5) число квадратных сантиметров в k м²;
- 6) число кубических метров в t дм³.

49.  Выразите в метрах в секунду скорость, равную n км/ч.50.  Сравните с числом a значение выражения, если a :

- 1) положительно;
- 2) отрицательно:

а) $a \cdot 0,45$; в) $\frac{5}{6}a$; д) $-4 + a$; ж) $a : 2,3$;б) $a \cdot 1,2$; г) $\frac{8}{7}a$; е) $-1,7 - a$; з) $a : 0,36$.

51. Запишите число:

- 1) противоположное числу a ;
- 2) обратное числу b ;
- 3) следующее за натуральным числом n ;
- 4)  предыдущее для натурального числа $m + 2$.

52. 1) Запишите в виде выражения:

а) $\frac{3}{11}$ числа c ; в) 36% от числа c ;б) $\frac{7}{6}$ числа c ; г) 105% от числа c .2) В каких случаях значение полученных выражений больше c , если $c < 0$?

53. Запишите в виде выражения:

- 1) произведение суммы m и n на 10;
- 2) сумму произведения m на n с числом 6;
- 3) разность частного x и y и числа 12;
- 4) частное разности x и y и числа 25;
- 5) разность квадратов a и b ;
- 6) квадрат разности a и b ;
- 7) частное произведения c и d и их суммы;
- 8) произведение частного c и d на их сумму.

54. Найдите значение выражения с двумя переменными:

1) $2x - 5y$ при $x = 1,45$; $y = -0,32$;

2) $3a + 4b$ при $a = -2\frac{1}{3}$, $b = 1\frac{3}{4}$;

3) $n^2 - 3nk + 2k^2$ при $n = -4$, $k = -7$;

4) $c^2 - 2cy + 3y^2$ при $c = 8$, $y = -3$;

5) $\frac{2a + 5b}{4a - 2b}$ при $a = \frac{3}{7}$, $b = \frac{2}{7}$;

6) $\frac{5p - 3q}{3p + 2q}$ при $p = 0,12$; $q = -0,2$;

7) $\frac{0,7x - 1,3}{0,095 + 0,19y}$ при $x = 2,17$; $y = 3,71$;

8) $\frac{a^2 + 1,37}{3,1b - 0,763}$ при $a = 5,3$; $b = 0,73$.

55. Какое из предложенных выражений является ответом на вопрос задачи?

1) Автобус обычно проходит s км за 5 ч. Из-за плохих погодных условий он ехал со скоростью на 10 км/ч меньше, чем обычно. Какое время затратил автобус на весь путь?

а) $s : 5 \cdot (s - 10)$;

в) $s : (s : 5 - 10)$;

б) $s \cdot 5 : (s - 50)$;

г) $s : 5 - 10$.

2) За 7 ч работы один автомат закрывает a банок, а другой — b банок. Сколько банок закроют они вместе за 6 ч?

а) $6a + b : 7$;

в) $6(a + b) : 7$;

б) $6a : 7 + b : 7$;

г) $6a + 6b : 7$.

56. Составьте выражение для ответа на вопрос задачи.

1) За 3 м шерстяной ткани и a метров шелка заплатили 2300 р. Сколько стоит 1 м шелка, если 1 м шерстяной ткани стоит k р.?

2) За 4 альбома для рисования и 7 ручек уплатили d р. Сколько стоит один альбом для рисования, если ручка стоит p р.?

3) Площадь садового участка, имеющего форму прямоугольника, равна 600 м^2 , а его длина равна a м. Какова длина изгороди, огораживающей этот участок?

4) Периметр прямоугольника равен r м, а длина одной из его сторон a м. Какую площадь имеет этот прямоугольник?

5) Мастер за 7 ч работы изготавливает a деталей, а его ученик за 5 ч работы — b деталей. На сколько деталей

больше, чем ученик, изготовит мастер за t ч совместной с ним работы?

6) Из одной трубы в бассейн поступает a л воды за 6 ч, а из другой — b л за 8 ч. Сколько воды поступит в бассейн за 11 ч совместной работы двух труб?

57. Из пунктов A и B , расстояние между которыми 200 км, одновременно выехали два автомобиля со скоростями соответственно a км/ч и b км/ч ($a > b > 50$). Какое расстояние будет между автомобилями через 2 ч, если:

1) автомобили выехали в противоположных направлениях, удаляясь друг от друга;

2) автомобили выехали навстречу друг другу;

3) автомобили выехали в одном направлении, причем:

а) автомобиль, выехавший из A , направился в B ;

б) автомобиль, выехавший из B , направился в A ?

Как изменятся выражения, если большая из скоростей автомобилей будет меньше 50 км/ч? Составьте выражения, которые будут давать верный ответ при любых скоростях автомобилей.

58. 1) Сколько различных значений может принимать выражение $\frac{|a|}{a}$? Проведите исследование для положительных и отрицательных значений a . При каких значениях переменной a выражение имеет смысл?

2) Какие значения может принимать выражение $|a| - a$? Проведите исследование для положительных и отрицательных значений a . При каких значениях переменной a выражение имеет смысл?

59. 1) Составьте выражения для площадей фигур, изображенных на рисунке 7.

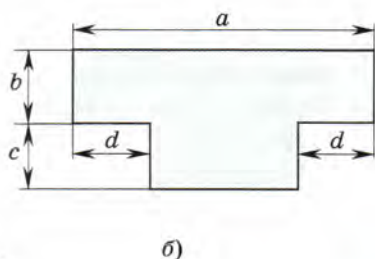
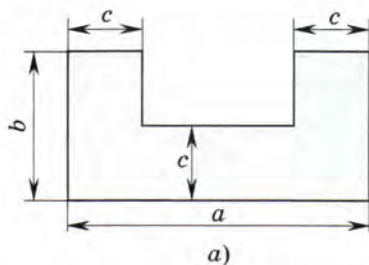


Рис. 7

2) Выполните необходимые измерения и вычислите площади фигур.

60. Найдите все значения x , удовлетворяющие неравенству:

- 1) $x < 10$, где x — натуральное число;
- 2) $x \geq 93$, где x — двузначное число;
- 3) $-3 \leq x \leq 4$, где x — отрицательное целое число;
- 4) $15\frac{3}{4} < x < 23\frac{8}{9}$, где x — четное число;
- 5) $|x| < 3$, где x — целое число.

61. Даны числа: $2a$, $a + 1$, $a - 2$, a^2 , $-3a$, $2a + 1$, $a^2 + a$, $\frac{a}{2}$.

Какие из этих чисел:

- 1) положительны при любом отрицательном значении a ;
- 2) четны при любом нечетном значении a ;
- 3) нечетны при любом четном значении a ;
- 4) четны, если a — целое число?

62. 1) Запишите выражение с переменной, значение которого находится по данной программе:

- а) $2 * x + 6 = MS \ 3 * x - 4 / MR =$;
- б) $x * = MS \ 5 / x - 2 + MR =$;
- в) $4 / x = MS \ x * = -63 + MR =$;
- г) $x + 3 = MS \ 2 * x - 7 * MR =$.

2) Вычислите с помощью калькулятора по данной программе с точностью до сотых значение выражения при:

- а) $x = 0,72$; б) $x = -1,23$.

63. 1) Какое из выражений удобнее для вычисления его значения: $ax + bx$ или $(a + b)x$?

2) Вычислите с помощью микрокалькулятора:

- а) $2,35 \cdot 0,72 + 0,72 \cdot 8,1$;
- б) $-7,3 \cdot 2,8 - 28 \cdot 0,94 - 89 \cdot 0,28$;
- в) $0,56 \cdot 2,9 + 6,7 \cdot 5,6 - 48 \cdot 0,56$.

64. Составьте программу для вычисления значения выражения и найдите его с точностью до 0,01:

- 1) $(2x + 3)(4x - 2)$ при $x = 3,81$;
- 2) $3x + x^2 - 7$ при $x = -1,032$;
- 3) $\frac{3,2x - 1,7}{7 + 2,6x}$ при $x = -3,502$;
- 4) $\frac{2x + 5}{3} - \frac{5x - 4}{x}$ при $x = 0,34$.

65. Для вычисления объема скирды (рис. 8) можно воспользоваться формулой $V \approx \frac{abh}{2}$, где V — объем скирды (м^3), a, b, h — размеры скирды (м), указанные на рисунке. Вычислите объем скирды при:
 а) $a = 6,7, b = 12,5, h = 2,4$; б) $a = 4,8, b = 10,6, h = 2,5$.

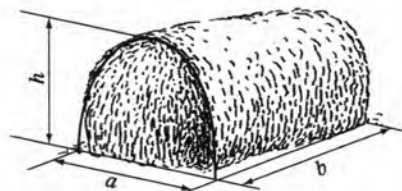


Рис. 8

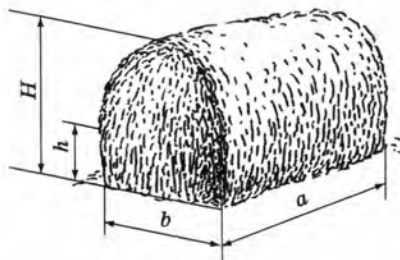


Рис. 9

66. Для вычисления объема скирды, изображенной на рисунке 9, можно воспользоваться формулой $V \approx \frac{(H + h)ab}{2}$, где a, b, h, H — размеры скирды (м), указанные на рисунке. Вычислите объем скирды при:
 а) $a = 6,2, b = 18, h = 3,5, H = 4,8$;
 б) $a = 5,5, b = 20, h = 2,8, H = 3,5$.

67. Великий математик XVIII в. Леонард Эйлер¹ обнаружил, что некоторые числа, полученные по формуле

$$P = x^2 + x + 41,$$

являются простыми. Найдите P при x , равном: 0, 1, ..., 9, 10. Можно ли сделать вывод о том, что при всех натуральных значениях переменной x по этой формуле будут получаться простые числа? Докажите, что по данной формуле можно получить составное число.

68. 1) Докажите, что $(10a + b) \cdot 11 = 100a + 10(a + b) + b$.
 2) Объясните, как проведено вычисление:
 а) $26 \cdot 11 = 286$; б) $87 \cdot 11 = 957$.
 3) Вычислите: а) $29 \cdot 11$; б) $64 \cdot 11$; в) $76 \cdot 11$; г) $94 \cdot 11$.

¹ Леонард Эйлер (1707—1783) — математик, по происхождению швейцарец, член Петербургской академии наук. Более четверти века работал в России, где им были созданы фундаментальные труды по математике, физике и другим наукам.

Контрольные вопросы и задания

1. Укажите допустимые значения переменной в выражении:
1) $\frac{5a+4b}{3}$; 2) $\frac{x+4}{2x-3}$.
2. Прочитайте выражение $\frac{a}{b}(a+b)$.
3. Найдите значение выражения $9x^2 - 6x - 8$ при $x = -\frac{2}{3}$.

§ 2. Уравнения

4. Математическая модель текстовой задачи

Математика помогает в решении многих задач в различных видах деятельности. Обычно это происходит так. Сначала задача формулируется на обычном языке и переводится на математический язык — *создается математическая модель* задачи. Затем математическая модель *исследуется*, и, наконец, результаты исследования *интерпретируются*, т. е. снова переводятся на обычный язык.

В школьном курсе математики с такой деятельностью мы встречаемся при решении текстовых задач, в условиях которых описываются более или менее реальные жизненные ситуации. В предыдущих пунктах перевод текста задачи на математический язык приводил к выражению, однако математические модели большинства текстовых задач являются уравнениями. Исследование модели сводится к решению уравнения, а интерпретация результатов — это, конечно, ответ на вопрос задачи.

Наибольшие затруднения и в решении реальных, и в решении учебных текстовых задач вызывает первый этап — перевод условия на математический язык.

В этом пункте мы рассмотрим некоторые часто встречающиеся в текстах задач сюжеты.

1. Задачи на выполнение плановых заданий

-  **Задача 1.** Чтобы сдать в срок книгу в библиотеку, Саша должен был читать в день по 40 страниц. Однако ему удалось прочитать в день на 15 страниц меньше, и чтение книги заняло у него на 6 дней больше. За сколько дней Саша планировал прочитать книгу?

В этой задаче неизвестно число дней, за которые Саша планировал прочитать книгу, и число страниц в этой книге. Одну из этих неизвестных величин следует обозначить буквой, затем, используя условие задачи, выразить вторую неизвестную через первую двумя способами и уравнивать полученные выражения.

Решение 1. Обозначим буквой x число дней, за которые Саша планировал прочитать книгу, тогда число страниц в книге будет равно $40x$. Поскольку фактически чтение заняло на 6 дней больше, т. е. $(x + 6)$ дней, и читал в день Саша на 15 страниц меньше, т. е. $(40 - 15)$ страниц, число страниц в книге можно выразить как $(x + 6)(40 - 15)$. Приравнивая полученные выражения, получаем уравнение

$$40x = (x + 6)(40 - 15).$$

Решение 2. Обозначим буквой x число страниц в книге, тогда число дней, за которые Саша планировал ее прочитать, равно $\frac{x}{40}$, а фактически он прочитал ее за $\frac{x}{40 - 15}$ дней. Поскольку значение второго выражения на 6 больше, чем первого, уравнивая их, получаем

$$\frac{x}{40} = \frac{x}{40 - 15} - 6.$$

Примечание. Во втором решении мы обозначили буквой x не ту величину, которую требовалось найти в задаче, поэтому после решения уравнения придется еще найти искомую величину, которую и указать в ответе.

2. Задачи на изменение количества

 **Задача 2.** В одной цистерне 58 т бензина, а в другой — 83 т. Из первой выкачивают в минуту по 0,3 т, а из второй — по 0,4 т бензина. Через сколько минут во второй цистерне окажется в полтора раза меньше бензина, чем в первой?

Решение. Обозначим искомое число минут буквой x , тогда через x минут в первой цистерне останется $58 - 0,3x$, а во второй $83 - 0,4x$ т бензина. Поскольку значение второго выражения в 1,5 раза меньше, чем первого, уравнивая их, получим

$$58 - 0,3x = 1,5(83 - 0,4x).$$

3. Задачи на сплавы и смеси

- ✓ **Задача 3.** Сплав золота и серебра массой 36 г содержит 21,6 г золота. Сколько золота нужно добавить в сплав, чтобы содержание серебра в нем стало равным 18%?

Решение. Процентное содержание серебра в сплаве равно отношению массы серебра ко всей массе сплава, умноженному на 100 (%).

Обозначим буквой x (г) искомую массу золота, которое нужно добавить в сплав. Тогда после этой добавки масса сплава станет $36 + x$ (г). Поскольку масса серебра равна $36 - 21,6$ (г), получим уравнение

$$\frac{36 - 21,6}{36 + x} \cdot 100 = 18.$$

4. Задачи на движение

- ✓ **Задача 4.** Из пункта A в пункт B велосипедист ехал со скоростью 16 км/ч, а возвращался по другой дороге, которая была на 8 км длиннее, со скоростью 18 км/ч. Обратный путь занял у велосипедиста на 7,5 мин больше, чем путь из A в B . Найти длину каждой дороги.

Решение. Обозначим длину дороги, по которой велосипедист ехал в пункт B , буквой x (км). Тогда длина дороги, по которой велосипедист возвращался в A , равна $x + 8$ (км).

Время, затраченное на путь в пункт B , равно $\frac{x}{16}$ (ч), а обратный путь у него занял $\frac{x + 8}{18}$ (ч). Уравнивая значения полученных выражений для времени движения и учитывая, что $7,5 \text{ мин} = \frac{1}{8} \text{ ч}$, получим уравнение

$$\frac{x}{16} = \frac{x + 8}{18} - \frac{1}{8}.$$

После нахождения значения x из этого уравнения нужно еще будет вычислить длину второй дороги.

- ✓ **Задача 5.** Катер, скорость которого в стоячей воде равна 21 км/ч, прошел от причала A до причала B и вернулся обратно. За это же время плот, отправленный от причала A к B , прошел 8,75 км. Какое расстояние между причалами A и B , если скорость реки равна 3 км/ч?

Решение. При движении по реке скорость катера по течению реки равна сумме скорости, которую развивает катер в стоячей воде, и скорости течения, т. е. $21 + 3$ (км/ч), а скорость катера против течения равна разности этих скоростей, т. е. $21 - 3$ (км/ч). Скорость плота равна скорости течения реки.

Обозначим искомое расстояние буквой x (км), тогда путь по течению занял у катера $\frac{x}{21+3}$ (ч), а против течения катер шел $\frac{x}{21-3}$ (ч). На весь путь у катера ушло $\frac{x}{21+3} + \frac{x}{21-3}$ (ч). Поскольку 8,75 км плот прошел за $\frac{8,75}{3}$ (ч), получаем уравнение

$$\frac{x}{21+3} + \frac{x}{21-3} = \frac{8,75}{3}.$$

Ситуации, описанные в большинстве текстовых задач, условны. Так, например, трудно представить себе, что Саша каждый день читал одинаковое количество страниц взятой в библиотеке книги, скорость велосипедиста или пешехода обычно непостоянна, меняется на разных участках реки скорость ее течения, более того, она различна на середине реки и у берега. Расстояние между причалами может быть меньше, чем длина участка реки между ними, так как русло реки не обязательно прямолинейно. Однако при решении текстовых задач мы на эти расхождения с реальностью внимания не обращаем.

Упражнения

- 69.** Запишите несколькими способами в виде равенства, что:
- 1) число a в 3,5 раза больше числа b ;
 - 2) число k на 18 больше числа n ;
 - 3) разность чисел c и d в 5 раз больше их частного;
 - 4) сумма чисел m и t в 2 раза меньше их произведения;
 - 5) разность чисел p и q составляет 24% от квадрата их суммы;
 - 6) сумма чисел b и c составляет 15% от суммы их квадратов.

70. Переведите на математический язык условие задачи.
- 1) Одно из чисел на 17 меньше, чем другое, а их сумма равна 75. Найдите большее из этих чисел.
 - 2) Первое число в 3 раза больше второго, а разность этих чисел равна 43. Найдите эти числа.
 - 3) К задуманному числу прибавили 4, увеличили полученную сумму в 5 раз, из результата вычли 2 и получили на 9 больше, чем получили бы, сложив учетверенное задуманное число с 9. Какое число было задумано?
 - 4) Из задуманного числа вычли 3, полученную разность уменьшили в 2 раза и получили на 11 больше, чем одна треть задуманного числа. Какое число задумано?

71. Зная, что буквой y обозначено задуманное число, сформулируйте задачи, аналогичные задачам из предыдущего номера:

$$\begin{array}{ll} 1) 4y + 10 = y + 2; & 3) 5y + 72 = -(2y + 12); \\ 2) 3y - 57 = 5y + 23; & 4) 53 - 5y = 0,5y. \end{array}$$

72. К каждой задаче составлена математическая модель. Объясните, что приняли за x , какие величины уравнивали.

1) В двух мешках было по 50 кг сахара. После того как из одного мешка взяли в 3 раза больше сахара, чем из другого, в первом осталось в 2 раза меньше сахара, чем во втором. Сколько сахара взяли из первого мешка?

$$(50 - x) = (50 - 3x) \cdot 2.$$

2) Два мотоциклиста двигались по шоссе навстречу друг другу. Через 8 мин после их встречи расстояние между ними стало равно 12 км. С какими скоростями ехали мотоциклисты, если скорость одного из них была на 100 м/мин больше скорости другого?

$$(2x + 100) \cdot 8 = 12\,000.$$

3) Хозяйка купила 300 г 70%-й пищевой уксусной кислоты. Сколько граммов воды нужно добавить, чтобы получился 9%-й раствор уксусной кислоты?

$$(300 + x) \cdot 9 = 70 \cdot 300 \text{ или } \frac{300 + x}{100} \cdot 9 = \frac{70 \cdot 300}{100}.$$

4) Автобус, проехав с некоторой скоростью часть пути, полчаса простоял из-за аварии. Чтобы на оставшихся 210 км пути наверстать потерянное время, водитель автобуса увеличил скорость на 10 км/ч. В конечный пункт

автобус прибыл по расписанию. Найдите, с какой скоростью проехал автобус первую часть пути.

$$\frac{210}{x} - \frac{210}{x+10} = \frac{1}{2}.$$

- 73.** Составьте уравнения к задачам на изменение количества. Буквой x обозначьте величину, о которой спрашивается в задаче.

1) В одном баке 46 л машинного масла, в другом 72 л. Из первого бака ежедневно берут по 3 л масла, а из второго — по 5 л. Через сколько дней во втором баке останется в 1,5 раза больше масла, чем в первом?

2) На одном складе было 120 т угля, а на другом — 72 т. С первого склада ежедневно вывозили по 6 т угля, а со второго — по 2,4 т. Через сколько дней на первом складе останется в 1,5 раза больше угля, чем на втором?

- 74.** Переведите условия задач на выполнение плановых заданий на математический язык двумя способами: в первом — буквой x обозначьте все плановое задание, а во втором — плановую дневную норму.

1) Бригада должна была закончить сев за 15 дней. Однако ежедневно засевалось на 10 га больше, чем предполагалось, и за 3 дня до срока оставалось засеять 36 га. Сколько гектаров должна засеять бригада?

2) На строительстве дороги укладчики асфальта, перевыполняя дневную норму на 500 м^2 , уже за 4 дня до конца месяца сдали 200 м^2 дороги сверх плана. Каково было месячное задание? (Месяц считать равным 30 дням.)

- 75.** Решите задачи на смеси сначала арифметическим способом, затем составьте уравнения.

1) Из двух сортов чая по цене 220 р. и 260 р. за килограмм требуется составить 4 кг смеси по цене 230 р. за килограмм. Сколько граммов чая каждого сорта нужно взять?

2) Смешав конфеты по 110 р. за килограмм и по 150 р. за килограмм, получили смесь по 120 р. за килограмм. Сколько граммов конфет того и другого сорта содержится в одном килограмме смеси?

- 76.** Составьте уравнения к задачам на движение по реке.

1) За 5 ч по течению реки катер проходит такое же расстояние, как за 6 ч 15 мин против течения. Найдите ско-

рость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2,4 км/ч.

2) Лодка может пройти по течению реки за 3 ч такое же расстояние, как за 3 ч 40 мин против течения. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде равна 5 км/ч.

77. Докажите, что:

1) собственная скорость лодки равна полусумме (половине суммы) скоростей движения лодки по течению и против течения реки;

2) скорость лодки по течению реки больше ее скорости против течения на удвоенную скорость течения.

78. К задаче «Из пункта A в пункт B , расстояние до которого 256 км, отправился товарный поезд со скоростью 66 км/ч, а спустя 20 мин через пункт B в направлении пункта A прошел скорый поезд со скоростью 90 км/ч. Через сколько времени после выхода товарный поезд встретится со скорым?» составлены уравнения:

а) $66x + 90 \left(x - \frac{1}{3} \right) = 256$;

б) $256 - 66 \cdot \frac{1}{3} = (66 + 90) \cdot \left(x - \frac{1}{3} \right)$;

в) $\frac{x}{66} - \frac{256 - x}{90} = \frac{1}{3}$;

г) $256 - 90x = 66 \left(x + \frac{1}{3} \right)$.

1) Объясните, что обозначено за x в каждом уравнении.

2) Какие величины уравнивались в каждом уравнении?

79. Задачи на движение двух объектов. Составьте разные математические модели.

а) Два мальчика, проживающих в домах, расстояние между которыми 660 м, выбежали навстречу друг другу из своих домов и встретились через 2 мин. Скорость одного из них на 30 м/мин меньше, чем другого. С какими скоростями бежали мальчики?

б) Два мотоциклиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов M и N , расстояние между которыми 96 км, и встречаются через час. С какой скоростью ехал каждый мотоциклист, если через 20 мин после встречи первому оставался путь до N , вдвое меньший, чем второму до M ?

в) От станции к озеру вышел пешеход со скоростью 4 км/ч. Через 0,5 ч вслед за ним от этой же станции и по той же дороге отправился велосипедист со скоростью 12 км/ч. К озеру они прибыли одновременно. Сколько времени пешеход добирался до озера?

г) Товарный поезд отошел от станции сразу вслед за пассажирским. Найдите скорость товарного поезда, если пассажирский поезд, двигаясь на 20 км/ч быстрее, прошел за 4 ч в 1,5 раза больший путь, чем товарный?

1) Назовите виды движений в каждой задаче.

2) В каких задачах можно говорить о скорости сближения, в каких — о скорости удаления?

80. Определите тип задачи. Переведите условие задачи на математический язык (если возникнут сложности, см. раздел «Практикум по решению текстовых задач»).

1) Турист предполагал пройти шестикилометровый маршрут с некоторой скоростью. Однако из-за погодных условий его скорость оказалась на 1 км/ч меньше, и турист прибыл в конечный пункт на 2 ч позже, чем рассчитывал. С какой скоростью прошел турист свой маршрут?

2) В зрительном зале клуба было 22 ряда. После того как число рядов увеличили на 2, а число мест в каждом ряду увеличили на 4, в зале стало на 128 мест больше, чем было первоначально. Сколько мест стало в зрительном зале?

3) Сколько граммов соли надо добавить к 200 г 10%-го раствора соли, чтобы получить 20%-й раствор?

4) В саду было 140 рядов фруктовых деревьев. При расширении сада число рядов довели до 300, а число деревьев в каждом ряду увеличили на 5, после чего число деревьев в саду увеличилось на 11 100. Сколько деревьев стало в саду?

5) В одном резервуаре 380 м³ воды, а в другом — 1500 м³. В первый резервуар каждый час поступает 80 м³ воды, а из второго каждый час откачивается 60 м³. Через сколько часов воды в резервуарах станет поровну?

6) За 9 ч по течению реки теплоход проходит такой же путь, что за 11 ч против течения. Найдите собственную скорость теплохода, если скорость течения реки 2 км/ч.

! Контрольные вопросы и задания

1. Переведите на математический язык условие задачи:
«Отцу 29 лет, а дочери 5 лет. Через сколько лет отец будет вдвое старше дочери?»
2. Какое из равенств:

$$1) \frac{200}{x} - 0,5 = \frac{200}{x - 20};$$

$$3) \frac{200}{x} - \frac{200}{x + 20} = 30;$$

$$2) \frac{200}{x} + 0,5 = \frac{200}{x - 20};$$

$$4) \frac{200}{x + 20} - \frac{200}{x} = 30$$

является правильным переводом на математический язык условия задачи: «Найдите скорость легкового автомобиля, зная, что она на 20 км/ч больше скорости грузовика и что 200 км легковой автомобиль проезжает на 30 мин быстрее, чем грузовик»? Что обозначено буквой x ?

Какие ошибки допущены в неверных вариантах перевода?

5. Решение уравнений

Мы уже говорили о том, что в каждом математическом предложении что-то утверждается. Утверждения могут быть истинными, как, например, равенство $2 + 1 = 3$, или ложными, например $5 + 1 = 3$.

Истинные и ложные утверждения называют
высказываниями.

Однако, если утверждение содержит переменные, оно может быть истинно при одних и ложно при других значениях этих переменных. Так, например, равенство $x + 1 = 3$ верно при $x = 2$ и неверно при любом другом значении x . Неравенство $ab > 0$ верно, когда значения переменных a и b одного знака (оба положительны или оба отрицательны), и неверно во всех других случаях, т. е. когда хотя бы одно из значений равно нулю или когда значения различны по знаку. Таким образом, *предложения с переменными не являются высказываниями. Если в предложение подставить значения содержащихся в нем переменных, оно обратится в высказывание.*

Чаще всего бывает нужно найти значения переменных, которые обращают предложение в истинное высказывание — *множество истинности* предложения. Так, например, множество истинности равенства $x + 1 = 3$ состоит из одного эле-

мента — числа 2, а множество истинности неравенства $ab > 0$ содержит все пары одинаковых по знаку чисел.

С понятием множества истинности, не используя этого термина, вы уже неоднократно встречались. Так, например, задача «Найти множество истинности предложения $x - 3 = 2$ » знакома вам в иной формулировке: «Решить уравнение $x - 3 = 2$ ».

В математическом языке, как и в русском языке, одну и ту же мысль можно выразить по-разному. Например, соотношение $x - 3 = 2$ между числами x , 3 и 2 можно записать как $x - 2 = 3$ или $x = 3 + 2$. Понятно, что все три предложения имеют одно и то же множество истинности — число 5.

Предложения с переменными,
имеющие одно и то же множество истинности,
называют **равносильными**.

При решении уравнений исходное уравнение стараются упростить, заменяя его *равносильным уравнением*, т. е. уравнением, имеющим те же самые корни. Для этого используются знакомые вам свойства числовых равенств:

1) если к каждому из равных чисел прибавить одно и то же число, то получатся равные числа;

2) если каждое из равных чисел разделить (умножить) на отличное от нуля число, то получатся равные числа.

Значит, прибавив к обеим частям уравнения одно и то же число (разделив или умножив обе части уравнения на одно и то же отличное от нуля число), мы получим уравнение, равносильное исходному.

В пункте 4 перевод условия задачи 1 на математический язык привел к уравнению $40x = (x + 6)(40 - 15)$. Для его решения мы сначала раскроем скобки: $40x = 25x + 150$. Затем, прибавив к обеим частям уравнения число $-25x$ (пока неизвестное), придем к равносильному уравнению $40x - 25x = 25x + 150 - 25x$. Выполним действия в обеих частях уравнения: $15x = 150$ и, разделив обе части уравнения на 15, получим простейшее уравнение $x = 10$. Число 10 — единственный корень этого, а значит, и равносильного ему исходного уравнения. Теперь можно записать ответ к задаче 1: «Саша предполагал прочитать книгу за 10 дней».

Вернемся к рассмотренному решению. Прибавив к обеим частям уравнения $40x = 25x + 150$ число $-25x$, мы фактиче-

ски перенесли слагаемое $25x$ из правой части уравнения в левую, поменяв его знак на противоположный. Этот прием переноса члена из одной части равенства в другую с переменной знака впервые описал великий среднеазиатский ученый аль-Хорезми. Арабское название *альджебр* этого приема и дало название «Алгебра» разделу математики, который вы изучаете.

При решении уравнений можно переносить слагаемые из одной части равенства в другую и делить (умножать) уравнение на число, отличное от нуля.

При этом всегда получается уравнение, равносильное исходному.

Решим теперь уравнение $\frac{x}{40} = \frac{x}{40 - 15} - 6$, к которому мы пришли, обозначив в задаче 1 буквой x число страниц взятой Сашей в библиотеке книги. Сначала выполним вычитание в знаменателе дроби: $\frac{x}{40} = \frac{x}{25} - 6$. Теперь избавимся от дробей, умножив уравнение на общее кратное (желательно наименьшее) знаменателей: НОК(40; 25) = 200, $5x = 8x - 1200$. Перенесем $8x$ в левую часть, не забыв изменить знак: $5x - 8x = -1200$, $-3x = -1200$. Осталось разделить уравнение на -3 , что и приводит нас к простейшему уравнению $x = 400$.

Итак, в книге оказалось 400 страниц, однако в задаче-то спрашивалось число дней. Чтобы записать ответ, разделим число страниц книги на число страниц, которые Саша планировал читать в день: $400 : 40 = 10$ (дней). Естественно, мы получили тот же ответ, что и в первом решении.

Кроме рассмотренных приемов, при решении уравнений иногда используются и другие соображения.



Пример 1. Решить уравнение $(x - 2)(x + 3) = 0$.

Решение. Чтобы найти корни этого уравнения, достаточно заметить, что произведение чисел равно нулю *тогда и только тогда*, когда среди множителей имеется нуль. Значит, либо $x - 2 = 0$, либо $x + 3 = 0$. Получаем два корня: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. Ясно, что при других значениях x множители отлич-

ны от нуля и, следовательно, их произведение тоже отлично от нуля.

Ответ: 2; -3.



Пример 2. Найти положительные корни уравнения

$$\frac{18}{x} + \frac{18}{x+4} + \frac{18}{x+7} = 14.$$

Решение. Попробуем применить древнейший метод решения — подобрать корень данного уравнения. Будем искать такое натуральное значение x , чтобы все три дроби оказались целыми числами. Для этого числа x , $x+4$ и $x+7$ должны быть среди делителей числа 18: 1, 2, 3, 6, 9, 18. Последовательно проверяя эти числа (подставляя их вместо x в уравнение), уже при $x = 2$ получим верное равенство, значит, число 2 — корень данного уравнения.

Теперь следует убедиться, что других положительных корней уравнение не имеет, поскольку *решить уравнение — значит найти все его корни*. Для этого достаточно заметить, что знаменатели каждой из дробей, стоящих в левой части уравнения, при увеличении значения x увеличиваются, а при уменьшении — уменьшаются. Значит, сами дроби при увеличении значения x уменьшаются, а при уменьшении — увеличиваются (напомним, что мы рассматриваем только положительные значения x). Отсюда следует, что если брать значение x , большее 2, то сумма дробей окажется меньше 14, а если положительное значение x меньше 2, то сумма дробей будет больше 14. Таким образом, число 2 — единственный положительный корень данного уравнения.

Ответ: 2.

Упражнения

81. Какие из следующих предложений являются высказываниями? Определите, истинны они или ложны:

1) $38 + 29 = 66$;

4) $x + 4 > 9$;

2) $67 + 84 > 150$;

5) $x + 23 = 48$ при $x = 25$;

3) $x + 56 = 76$;

6) $x - 3 < 100$ при $x = 97$.

82. Определите, истинными или ложными высказываниями становятся следующие предложения при указанных значениях переменных:

- 1) $x(x - 5) = 14$ при x , равном: а) 6; б) 7;
- 2) $3y > 138$ при y , равном: а) 50,07; б) -100;
- 3) $a^3 - 3$ делится на 3 при a , равном: а) 9; б) 10;
- 4) $35x - 12y = 1$ при: а) $x = -1, y = -3$; б) $x = 1, y = 0$;
- 5) $|7x| = 2x - 5$ при: а) $x = -1$; б) $x = \frac{5}{9}$.

83. Для следующих предложений подберите, если возможно, два значения переменной так, чтобы при их подстановке в предложение одно из высказываний получилось истинным, а другое — ложным:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1) $2x - 4 = 92$; | 6) $x(x - 6) = 8$; |
| 2) $3x - 1 = -34$; | 7) $ x > x$; |
| 3) $38x > 159$; | 8) $ x = -x$; |
| 4) $64x < -567$; | 9) $ x = 2x$; |
| 5) $x(x + 1) = 10$; | 10) $ x + 1 = 2x$. |

84. Найдите множество истинности предложений с переменными:

- | | | |
|----------------------|----------------------|------------------|
| 1) $2x + 14 = 48$; | 4) $0 \cdot x = 0$; | 7) $a : b < 0$; |
| 2) $a + b = b + a$; | 5) $x^2 = 4$; | 8) $0 : x = 1$. |
| 3) $x^2 + 1 = 0$; | 6) $2x + 36 < 44$; | |

85. 1) Равносильны ли уравнения:

а) $2x + 34 = 0$ и $2x = -34$;

б) $\frac{1}{3}x + 2 = \frac{1}{2}x - 3$ и $2x + 12 = 3x - 18$;

в) $-x^3 - 2x^2 + 3x - 6 = 0$ и $x^3 + 2x^2 - 3x + 6 = 0$;

г) $3x^4 + 2x^3 - x^2 = 0$ и $3x^2 + 2x - 1 = 0$;

д) $\frac{2}{x} + x - 7 = 0$ и $2 + x^2 - 7x = 0$;

е) $\frac{x^2 - 4}{x + 2} = 1$ и $x^2 - 4 = x + 2$;

ж) $-3x^2 + 6x - 9 = 0$ и $x^2 - 2x + 3 = 0$;

з) $23 - x(2x - 3) = 0$ и $23 - 2x^2 + 3x = 0$?

2) Какие преобразования привели к равносильным уравнениям? Какие преобразования привели к неравносильным уравнениям?

86. Запишите два уравнения, равносильных уравнению:

1) $x + 35 = 36$;

3) $x \cdot 4,7 = 5,64$;

2) $x - 21 = 42$;

4) $x : 8,2 = 0,5$.

87. Является ли корнем уравнения:

1) $1,35x = 10,8$ число 8;

2) $5x = \frac{10}{3}$ число $\frac{2}{3}$;

3) $x^2 - x = 30$ число: -5; 5; 6;

4) $y^2 + y = 90$ число: 10; -10; 9;

5) $|x| - x = 0$ число: 5,8; -6,2;

6) $|x| + x = 0$ число: -6,5; 7,3;

7) $x^3 + 0,83x^2 - 9,507x - 12,753 = 0$ число: 1,5; -2,6;

8) $x^3 - 11,55x^2 - 20,11x + 86,688 = 0$ число: 2,05; -3,2?

88. Расположите в порядке возрастания корни уравнений:

$x - 1 = 0$, $x + \frac{1}{2} = 0$, $3x + 1 = 0$, $6x - 2 = 0$, $102x = 0$.

89. 1) Решите уравнение:

а) $8x - 341 = 1 - x$;

б) $419 - 3y = 4y - 8$;

в) $1,78z - 1,2 = 2,48z + 2,44$;

г) $3,2 + 2,7x = 0,48 - 0,02x$;

д) $5 - \frac{2}{3} \left(x - \frac{3}{5} \right) = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3}x$;

е) $\frac{3}{7}x + \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \left(\frac{5}{7}x + \frac{2}{3} \right)$;

ж) $2 - \frac{2y + 7}{4} = \frac{3 - 5y}{2}$;

з) $\frac{7x - 3}{6} = 1 - \frac{2x + 4}{3}$;

и) $7x(6x - 5) + 42x = 3x(5 + 14x) + 49$;

к) $27y(5y - 3) + 2y = 9y(15y - 7) + 6,4$.

2) Приведите пример уравнения, у которого: а) один корень; б) бесконечное множество корней; в) нет корней.

90. 1) Решите уравнение:

а) $x(x - 1) = 0$;

б) $(x + 3)(x - 2) = 0$;

в) $\left(2x - \frac{1}{3} \right)(3x + 3) = 0$;

4) Отец старше сына на 25 лет. Возраст отца относится к возрасту сына как 9 : 4. Сколько лет отцу и сколько лет сыну?

5) В трех цехах завода работает 2740 человек. Во втором цехе на 140 человек больше, чем в первом, а в третьем цехе — в 2 раза больше, чем во втором. Сколько человек работает в каждом цехе?

6) Турист прошел маршрут длиной 110 км за три дня. Во второй день он прошел на 5 км меньше, чем в первый, а в третий день — $\frac{3}{7}$ расстояния, пройденного за первые два дня. Сколько километров прошел турист за каждый из трех дней пути?

7) На ферме находятся кролики и куры. У них 3150 ног и 1000 голов. Сколько кроликов и сколько кур на ферме?

8) В 1 р. — 100 к. Как разменять 1 р. на монеты по 5 к. и по 3 к., чтобы оказалось всего 26 монет?

9) В одной из двух одинаковых цистерн содержится 34 т, а в другой — 48 т нефти. Для полной заливки цистерн в одну добавили в 2 раза больше нефти, чем в другую. Сколько нефти добавили в каждую цистерну?

10) На школьной олимпиаде было предложено 20 задач. За каждый правильный ответ участнику начислялось 12 очков, а за неправильный — списывалось 10 очков. Сколько правильных ответов дал участник, набравший 86 очков?

97. 1) Найдите два последовательных натуральных числа, сумма которых равна 167.

2) Найдите три последовательных четных числа, сумма которых равна 402.

3) Найдите три последовательных нечетных числа, сумма которых равна 291.

98. Решите уравнение с модулем:

1) $|2x - 1| = 3$;

3) $|2x| - 3x = 32$;

2) $3x + |x| = 11$;

4)* $|7 - x| = |2x - 5|$.

99. Найдите значение a , при котором:

1) число 2 является корнем уравнения $(a - 2)x = a - 1$;

2) число 1 является корнем уравнения $(a^2 + 6)x = a^2 + 2a$.

100. Выразите x из равенства:

1) $x + a = 5$;

2) $x - b = 8$;

3) $cx = 15$;

4) $\frac{a}{x} = 7$;

5) $a - 2x = 0$;

6) $bx + a = 10$;

7) $3x + b = 2x - c$;

8) $2(c - 2x) = d - 2x$.

101. Решите старинные задачи, составляя уравнения.

1) Летела стая гусей, навстречу им летит один гусь и говорит: «Здравствуй, сто гусей!» «Нас не сто гусей, — ответил ему вожак стаи, — если бы нас было столько, сколько теперь, да еще столько, да полстолько, да четверть столько, да еще ты, гусь, с нами, так тогда нас было бы сто гусей». Сколько было гусей в стае?

2) У Пифагора однажды спросили, сколько у него учеников. «Половина моих учеников изучает прекрасную математику, четверть исследует тайны природы, седьмая часть упражняет силу духа. Добавьте еще к ним трех юношей, из коих Теон самый способный». Сколько было учеников у Пифагора?

! Контрольные вопросы и задания

1. Какие уравнения называют равносильными? Какие вы знаете приемы, с помощью которых получают уравнение, равносильное исходному?
2. Решите уравнение:
1) $5(3x - 2) - 7(2x + 1) = 4(3x - 5)$;
2) $\frac{2x + 3}{3} - \frac{3x - 4}{5} = \frac{x}{3} + \frac{9}{5}$.
3. Объясните, почему:
1) корнем уравнения $2(x - 7) = 2x - 14$ является любое число;
2) уравнение $2(x - 7) = 2x - 15$ не имеет ни одного корня.

6. Уравнения с двумя переменными и их системы

До сих пор, составляя уравнение по условию задачи, мы обозначали буквой одну из неизвестных величин. Однако часто удобнее обозначать сразу две неизвестных величины.

✓ **Пример 1.** Для размещения туристов на ночлег по двое в одну палатку не хватает трех палаток, а если разместить их по трое, одна палатка останется пустой. Найти число туристов и число палаток.

Решение. Обозначим число туристов буквой m , а число палаток буквой n . Тогда попытка разместить туристов по двое приводит к уравнению $\frac{m}{2} = n + 3$. А размещение по трое описывается уравнением $\frac{m}{3} = n - 1$. Искомые значения m и n должны одновременно удовлетворять обоим уравнениям, т. е. обращать оба уравнения в верные числовые равенства. В таких случаях говорят, что *пара значений m и n — решение системы уравнений* $\frac{m}{2} = n + 3$ и $\frac{m}{3} = n - 1$. Решить систему — значит найти все ее решения. Систему уравнений записывают с помощью фигурной скобки следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{m}{2} = n + 3, \\ \frac{m}{3} = n - 1. \end{cases}$$

Избавимся от дробей, умножив первое уравнение системы на 2, а второе — на 3:

$$\begin{cases} m = 2n + 6, \\ m = 3n - 3. \end{cases}$$

Поскольку нас интересуют значения переменных m и n , при которых оба равенства системы верные, мы можем вычесть из обеих частей второго равенства системы подобные члены, стоящие в левой и правой частях первого равенства. Получим равенство $0 = n - 9$, из которого находим, что искомое значение n равно 9.

Чтобы найти соответствующее значение m , подставим найденное значение n , например, в первое уравнение системы: $m = 2 \cdot 9 + 6 = 24$. Теперь можно ответить на вопрос задачи.

О т в е т: у 24 туристов было 9 палаток.

Проанализируем приведенное решение. Избавляясь от дробей, мы в левых частях обоих уравнений получили одно и то же число m . Это дало нам возможность, вычитая из второго уравнения системы ее первое уравнение, *исключить переменную m* и получить уравнение с одной переменной n . Затем это уравнение решалось, и, наконец, было вычислено значение второй переменной. Такой способ решения систем называют *методом исключения переменной*. Решим этим методом еще несколько систем.

 **Пример 2.** Решить систему уравнений $\begin{cases} 3x + 2y = -1, \\ 5x - 4y = 35. \end{cases}$

Решение. Здесь удобнее исключать переменную y . Для этого первое уравнение нужно умножить на 2 и прибавить ко второму: $\begin{cases} 6x + 4y = -2, \\ 5x - 4y = 35. \end{cases}$ Получаем $11x = 33$, $x = 3$. Значение y найдем из уравнения $3x + 2y = -1$:

$$3 \cdot 3 + 2y = -1, \quad 2y = -10, \quad y = -5.$$

Ответ: решением системы уравнений является пара чисел $(3; -5)$.

 **З а м е ч а н и е.** Умножение уравнения системы на число и замена одного из уравнений системы его суммой или разностью с другим из уравнений приводят к *равносильной системе*. Так, исключив переменную y , мы на самом деле пришли не к уравнению с одной переменной x , а к системе $\begin{cases} 6x + 4y = -2, \\ 11x = 33, \end{cases}$ *равносильной* исходной.

 **Пример 3.** Решить систему $\begin{cases} 6x + 7y = 7, \\ 5y - 4x = 34. \end{cases}$

Решение. Перепишем систему, расположив одноименные переменные друг под другом: $\begin{cases} 6x + 7y = 7, \\ -4x + 5y = 34. \end{cases}$

Будем исключать переменную x . Найдя, что 12 — наименьшее общее кратное чисел 6 и 4, на которые умножается переменная x в первом и втором уравнениях системы соответственно, умножим первое уравнение на 2, а второе на 3, чтобы сделать коэффициенты при x (числа, на которые умножается x) противоположными друг другу:

$$\begin{cases} 12x + 14y = 14, \\ -12x + 15y = 102. \end{cases}$$

Заменим теперь второе уравнение системы его суммой с первым:

$$\begin{cases} 12x + 14y = 14, \\ 29y = 116. \end{cases}$$

Далее имеем:

$$\begin{cases} 6x + 7 \cdot 4 = 7, \\ y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} 6x = -21, \\ y = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3,5, \\ y = 4. \end{cases}$$

Мы получили простейшую систему, которую можно записать в ответ.

Ответ: $\begin{cases} x = -3,5, \\ y = 4. \end{cases}$

Примечание. Обычно при решении системы не делают пояснений и записывают решение как цепочку преобразований:

$$\begin{cases} 6x + 7y = 7, \\ 5y - 4x = 34, \end{cases} \quad \begin{cases} 6x + 7y = 7, \\ -4x + 5y = 34, \end{cases} \quad \begin{cases} 12x + 14y = 14, \\ -12x + 15y = 102. \end{cases}$$
$$29y = 116, y = 4. \quad 6x + 7 \cdot 4 = 7, x = -3,5.$$

Ответ: $(-3,5; 4)$.

Во всех трех рассмотренных примерах мы с помощью умножения уравнений системы на число уравнивали коэффициенты при одной из переменных, а затем заменяли одно из уравнений системы его *суммой или разностью* с другим ее уравнением. Такой способ исключения переменной называют *способом сложения*.

Упражнения

102. Является ли пара чисел $x = -8$, $y = -6$ решением уравнения:

1) $2x + 3y = -30$;

3) $0,2x + 0,5y = 3$;

2) $3x - 2y = -12$;

4) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}y = 0$?

103. Выразите из уравнений одну из переменных через другую и найдите какие-нибудь два решения уравнения:

1) $3x + 2y = 5$;

4) $0,03x - 0,63y + 0,9 = 0$;

2) $4x - 3y = 11$;

5) $\frac{2}{5}x - \frac{3}{4}y - 1 = 0$;

3) $2,3x + 3,3y + 10 = 0$;

6) $\frac{3}{7}y - \frac{2}{3}x + \frac{5}{14} = 0$.

104. Может ли пара целых чисел быть решением уравнения:

1) $4x + 4y = 7$;

4) $7x + 9y = 0$;

2) $13x + 26y = 5$;

5) $2x + 3y = 6$;

3) $5x + 7y = 1$;

6) $4x + 18y = 17$?

105. Найдите два числа, которые при делении на 3 дают остаток 2, а при делении на 5 — остаток 3.

106. Длины сторон прямоугольника — натуральные числа, а его периметр и площадь равны. Найдите такой прямоугольник.

107. Составьте уравнение с переменными x и y , решением которого будет пара чисел:

1) $x = -3, y = 9;$

3) $x = 1,7, y = -2,3;$

2) $x = \frac{1}{3}, y = -6,5;$

4) $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{3}{5}.$

108. Является ли решением системы уравнений

$$\begin{cases} 7,5x - 11y = 1, \\ 5x - 8y = 3 \end{cases} \quad \text{пара значений переменных:}$$

1) $x = -5, y = -3,5;$

2) $x = 6, y = 4?$

109. Составьте систему уравнений, решением которой будет пара чисел:

1) $x = 10, y = 3;$

3) $x = 1,3, y = -2,7;$

2) $x = -2, y = 5;$

4) $x = \frac{2}{5}, y = -\frac{3}{7}.$

110. Решите систему уравнений, складывая или вычитая ее уравнения:

1) $\begin{cases} -4x + 3y = 8, \\ 4x + 5y = 16 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x + 2y = 16, \\ -5x - 2y = 20; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 8y = 22, \\ 7x + 8y = 78; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 9x - 5y = 23, \\ 9x + 2y = -5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + 7y = 26, \\ 6x - 7y = 62; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 11x - 7y = 0, \\ 13x - 7y = 8. \end{cases}$

111. Решите систему уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} 5x + 3y = 63, \\ 15x - 8y = 2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5p + 6q = 1, \\ 4p + 7q = 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3a + 5b = 51, \\ 12a - 11b = 18; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 35x - 3y = 5, \\ 49x - 4y = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4c - 3d = 7, \\ 5c + 2d = 26; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 25x + 18y = 75, \\ 35x + 38y = 105. \end{cases}$

112. Упростите уравнения и решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} 5(x + 2y) - 3 = x + 5, \\ 4(x - 3y) - 50 = -y; \end{cases}$

$$2) \begin{cases} 5(x - y) - 26 = 2x + 1, \\ 3(x - 6y) + 4 = 9y + 19; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 12 - 2(x - 3y) = x + y + 2, \\ 1,2x + 0,7y + 1,4 = 0. \end{cases}$$

113. Обозначив одно из чисел буквой x , а другое буквой y , составьте и решите систему уравнений.

1) Найдите два числа, если известно, что их сумма равна 31, а их разность равна 6.

2) Два числа в сумме дают 93. Найдите эти числа, если $\frac{3}{4}$ одного числа составляют $\frac{4}{5}$ другого.

3) Задуманы два числа. Сумма этих чисел равна 59, а их разность — 35. Какие числа задуманы?

4) $\odot$ Сумма двух чисел равна 2645. Одно из них составляет 15% другого. Найдите эти числа.

5) $\odot$ Разность двух чисел равна 169. Одно из них составляет 35% другого. Найдите эти числа.

6) $\bullet$ Найдите два числа, сумма которых равна a , а разность равна b .

114. Метод исключения переменных для решения систем был известен уже в Древнем Китае. Задачи, решаемые этим способом, рассматривались в трактате «Арифметика в девяти книгах» (около II в. до н. э.). Решите, составляя систему уравнений, две задачи из этого трактата.

1) В клетке находятся фазаны и кролики. Известно, что у них 35 голов и 94 ноги. Узнайте число фазанов и число кроликов.

2) Пять волов и два барана стоят 11 таэлов, а 2 вола и 8 баранов стоят 8 таэлов. Сколько стоят отдельно вол и баран?

115. 1) Для новогоднего вечера купили 38 кг конфет и печенья и уплатили 2080 р. Сколько конфет и сколько печенья было куплено, если цена килограмма печенья равна 50 р., а килограмма конфет — 60 р.?

2) Для детского сада купили 250 кг риса и пшена. Килограмм риса стоил 14 р., а килограмм пшена — 9 р. За рис заплатили на 50 р. больше, чем за пшено. Сколько килограммов риса и сколько пшена было куплено для детского сада?

116. Решите задачу, составляя уравнение или систему уравнений.

1) Основание прямоугольника в 2,5 раза больше высоты, а периметр равен 14 м. Найдите площадь прямоугольника.

2) Основание прямоугольника в 1,5 раза больше высоты, а высота на 16 м меньше основания. Найдите площадь прямоугольника.

117. 1) Для проведения контрольной работы заготовили чистые листы бумаги. Если раздавать учащимся по 2 листа, то останется 20 листов, а чтобы раздать по 3 листа, понадобится еще 12 листов. Сколько учащихся в классе и сколько листов бумаги было заготовлено?

2) Если учащихся, пришедших на школьную математическую олимпиаду, рассаживать в классе по одному за каждый стол, то не хватит 8 столов. Если же рассаживать их по двое, то 7 столов останутся свободными. Сколько учащихся пришло на олимпиаду и сколько столов в классе?

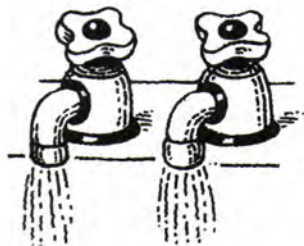
118. *Старинные задачи.*

1) Некто имеет работников и деньги. Если он даст каждому работнику 5 монет, у него останется 30, а чтобы раздать по 7 монет, ему не хватает 30. Спрашивается, сколько у него работников.

2) Некто согласился работать с условием получить в конце года (12 месяцев) одежду и 10 флоринов; но по истечении 7 месяцев прекратил работу и при расчете получил одежду и 2 флорина. Сколько флоринов стоила одежда?

119. 1) Для изготовления 550 деталей двое рабочих затратили 5 ч, и, кроме того, один из них работал еще 1 ч. Если бы совместная работа продолжалась на 1 ч меньше, то другому рабочему для ее окончания потребовалось бы 3,5 ч. Сколько деталей изготовлял каждый рабочий за 1 ч?

2) Для наполнения ванны в течение 8 мин были открыты краны холодной и горячей воды, а затем кран холодной воды закрыли, и через 6 мин после этого в ванне оказалось 192 л воды. Если бы оба крана были открыты 5 мин, а затем еще 7 мин был открыт только кран горячей воды, то в ванне оказа-



лось бы 146 л воды. Сколько литров воды подается через каждый кран за 1 мин?

120. 1) Если Ира внесет 40%, а Катя — 45% имеющихся у каждой денег, то общая сумма составит 21 р. 50 к. Если же Ира внесет 45% имеющихся у нее денег, а Катя — 40%, то общая сумма составит 21 р. Сколько денег у Иры и сколько у Кати?
- 2) Известно, что 30% числа a на 20 больше, чем 25% числа b , а 30% числа b на 8 больше, чем 20% числа a . Найдите числа a и b .

121. Найдите число a , если: а) значение $x = 2$; б) значение $y = -1$ входит в решение системы:

1)
$$\begin{cases} 2x - ay = 11, \\ x + 3y = -1; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} ax + 3y = 11, \\ 5x - 2y = 12. \end{cases}$$

! Контрольные вопросы и задания

1. Что называется решением системы уравнений с двумя переменными? В каких случаях говорят, что два уравнения образуют систему уравнений?
2. Даны два уравнения: $2x + y = 15$ и $x - 2y = 7$. Найдите пару значений переменных x и y , которые:
 - 1) удовлетворяют первому уравнению, но не удовлетворяют второму;
 - 2) удовлетворяют второму уравнению, но не удовлетворяют первому;
 - 3) удовлетворяют обоим уравнениям;
 - 4) не удовлетворяют ни одному уравнению.
3. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 4x - 5y = 25, \\ 3x + 2y = 0,5. \end{cases}$$
4. Решите старинную задачу. Некто сказал другу: «Дай мне 100 р., и я стану вдвое богаче тебя». Друг ответил: «Дай ты мне только 10 р., и я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько денег было у каждого?

ФУНКЦИЯ

§ 3. Функции и способы их задания

7. Понятие функции

- ✓ **Задача 1.** В аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда (рис. 10), наливают воду. Сколько воды в аквариуме, если высота ее столба в нем равна h (см)?

Решение. Пространство, заполненное водой, — прямоугольный параллелепипед с измерениями 60 см, 40 см и h см. Объем его равен $60 \cdot 40 \cdot h$ (см³). Обозначив объем воды в литрах буквой V и учитывая, что $1000 \text{ см}^3 = 1 \text{ л}$, получим:

$$V = 2400h \text{ см}^3 = 2,4h \text{ л}.$$

Эта формула выражает зависимость объема воды в аквариуме от высоты ее столба. Будем рассматривать теперь V и h в формуле $V = 2,4h$ как переменные. Допустимые значения переменной h — все положительные числа, не превышающие 50 (высота аквариума равна 50 см). Обратим внимание на то, что каждому допустимому значению переменной h соответствует единственное значение переменной V .

Так, например:

$$V = 2,4 \cdot 20 = 48 \text{ при } h = 20, V = 2,4 \cdot 25 = 60 \text{ при } h = 25.$$

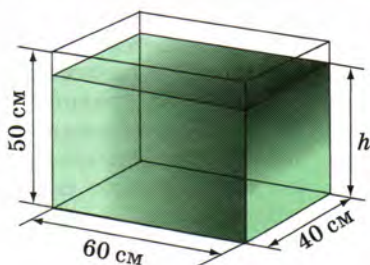


Рис. 10

- ✓ **Задача 2.** Площадь прямоугольника равна 60 см^2 , а одно из его измерений a см. Каково второе измерение прямоугольника?

Решение. Обозначим искомое измерение буквой b (см), тогда $b = \frac{60}{a}$.

Рассматривая в этой формуле b и a как переменные, заметим, что и в данном случае каждому допустимому значению переменной a (допустимы любые положительные значения) соответствует единственное значение переменной b . Например, при $a = 2$ имеем $b = \frac{60}{2} = 30$, при $a = 12$ соответствующее значение $b = \frac{60}{12} = 5$.

В рассмотренных задачах с изменением значения одной переменной изменяется и значение другой, причем каждому допустимому значению первой переменной соответствует единственное значение второй. Такие пары переменных встречаются довольно часто, и у них есть специальные названия.

Переменную y называют **функцией** переменной x , если каждому допустимому значению x соответствует единственное значение y .

Переменную x называют **аргументом** функции y .

Правило, по которому для каждого допустимого значения аргумента находят соответствующее ему значение функции, обычно обозначают какой-либо буквой. Чтобы указать, что значения функции y получают из значений аргумента x по правилу f , пишут: $y = f(x)$.

Читается: *игрек равен эф от икс*.

Значение функции, соответствующее значению аргумента, равному, например, 5, обозначается: $f(5)$.

Читается: *эф от пяти*.

 **Пример 1.** Дана функция $y = f(x)$, где $f(x) = \frac{x}{x-3}$. Найти $f(5)$.

Решение. Правило f задано с помощью формулы, но не сказано, какая задача к ней привела.

Условились считать *допустимыми* все значения аргумента функции, при которых записанное в правой части формулы выражение имеет смысл.

В данном случае допустимы все значения x , кроме $x = 3$.

Найти $f(5)$ — значит найти значение функции y , соответствующее значению аргумента x , равному 5. Подставим в формулу $f(x) = \frac{x}{x-3}$ вместо x его значение 5:

$$f(5) = \frac{5}{5-3} = 2,5.$$

Ответ: $f(5) = 2,5$.



Пример 2. При каком значении аргумента значение функции $y = 5 - 4x$ равно 3?

Решение. Нужно найти значение x , при котором верно равенство $5 - 4x = 3$.

Имеем: $-4x = 3 - 5$, $-4x = -2$, $x = 0,5$.

Ответ: при $x = 0,5$.

Упражнения

122. По условию задачи составьте функцию $y = f(x)$.

а) Основание прямоугольника равно x (м), а высота на 5 м больше. Чему равна площадь y (м²) прямоугольника? ($x_1 = 11$, $x_2 = 7$.)

б) Сторона квадрата равна x (м). Чему равна площадь y (м²) этого квадрата? ($x_1 = 15$, $x_2 = 0,7$.)

в) В баке емкостью 400 л содержится 160 л воды. Каждую секунду в бак вливается 6 л воды. Сколько литров воды (y) будет в баке через x секунд? ($x_1 = 2$, $x_2 = 21$.)

г) В книге 280 страниц. Девочка ежедневно читает по 20 страниц. Сколько страниц (y) ей останется прочитать через x дней? ($x_1 = 7$, $x_2 = 14$.)

Выполните задания и ответьте на вопросы.

1) Каковы допустимые значения переменной x ?

2) Найдите значения переменной y , соответствующие значениям x_1 и x_2 .

123. Функция $y = f(x)$ задана правилом.

а) Правило f заключается в том, что для любого натурального двузначного числа находят сумму его цифр.

б) Правило f заключается в том, что для любого четного двузначного числа находят сумму всех его делителей, отличных от самого числа.

1) Укажите множество допустимых значений аргумента функции y .

2) Найдите: $f(10)$, $f(18)$, $f(24)$, $f(96)$.

124. Дана функция $y = f(x)$: а) $f(x) = \frac{12}{x}$; б) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.

1) Укажите множество допустимых значений аргумента этой функции.

2) Найдите: $f(0,25)$, $f(0,5)$, $f(2)$, $f(4)$.

125. Дана функция $y = g(x)$: $y = 1,6x + 4$; $y = 18 - \frac{9}{2}x$.

1) Укажите множество допустимых значений аргумента функции $y = g(x)$.

2) Найдите: а) $g(0)$; б) $g(4)$; в) $g(-6,4)$; г) $g\left(\frac{4}{5}\right)$.

3) Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно:

а) 8; б) $-10,5$; в) 0; г) $\frac{2}{7}$.

126. Найдите значение функции $y = f(x)$:

1) $f(x) = x(x-8)$ при x , равном: а) -10 ; б) 0; в) 1,2; г) $\frac{3}{4}$;

2) $f(x) = x(6-x)$ при x , равном:

а) -3 ; б) 0; в) 1,3; г) $\frac{2}{3}$.

127. При каком значении аргумента значение функции $y = g(x)$ равно a :

1) $g(x) = 4x - 2$, $a = 6,5$; 3) $g(x) = \frac{5x+1}{6}$, $a = \frac{1}{4}$;

2) $g(x) = 1,5x - 4$, $a = -1$; 4) $g(x) = \frac{7-2x}{5}$, $a = -\frac{2}{15}$?

128. При каких значениях аргумента равны значения функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$:

1) $f(x) = 3 - 2(x-5)$, $g(x) = 5 - 3(2x+7)$;

2) $f(x) = \frac{2x-12}{5}$, $g(x) = \frac{7-3(2-3x)}{3}$?

129. 1) Запишите формулу для вычисления:

а) площади круга $S \text{ м}^2$ по его радиусу $r \text{ м}$;

б) средней скорости $v \text{ км/ч}$ пешехода, прошедшего расстояние 15 км за $t \text{ ч}$;

в) объема прямоугольного параллелепипеда $V \text{ м}^3$, длина которого равна 5 м, ширина 3 м, а высота $h \text{ м}$;

г) угла α° , смежного с углом, величина которого равна x° ;
 д) натурального числа n , зная, что при делении на 7 в частном получается 3, а остаток равен r .

2) Укажите множество допустимых значений аргумента полученной функции.



Контрольные вопросы и задания

1. В каком случае переменную y называют функцией переменной x ? Как при этом называют переменную x ?
2. Напишите формулу для вычисления длины окружности C (м) по ее радиусу r (м). Укажите множество допустимых значений r .
3. 1) Для функции, заданной формулой $f(x) = 2x(3 - x)$, найдите:
 а) $f(-2)$; б) $f(4)$; в) $f(6)$.
 2) При каком значении x значение функции равно нулю?

8. Таблица значений и график функции

В некоторых случаях правило, по которому для каждого допустимого значения аргумента находят соответствующее значение функции, можно задать, указав непосредственно все пары значений аргумента и функции.



Пример 1. Таблица стоимости P (р.) проезда в пригородном электропоезде в направлении Москва — Вязьма в 2003 г. в зависимости от номера n зоны.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	7	7	11,4	15,2	19	22,8	26,6	30,4	34,2	38

С помощью этой таблицы для каждого значения переменной n можно указать единственное значение переменной P , стоящее в том же столбце, например при $n = 2$ имеем $P = 7$. Таким образом, эта таблица задает функцию $P = f(n)$.



Пример 2. Таблица квадратов двузначных натуральных чисел (см. раздел «Справочные материалы») задает функцию $y = x^2$, множество допустимых значений аргумента которой — двузначные числа.

С помощью этой таблицы легко найти квадрат любого двузначного числа. Найдем, например, квадрат числа 37.

- ① В левом столбце (десятки) находим цифру 3.
- ② В верхней строке (единицы) находим цифру 7.
- ③ На пересечении строки «3» и столбца «7» читаем: 1369.

$$37^2 = 1369.$$

Такие таблицы, как таблица квадратов, в которых значение функции находят на пересечении строки и столбца, называют *таблицами с двумя входами*.

Пример 3. Обозначим время суток буквой x , а температуру воздуха в градусах буквой y . Множество допустимых значений аргумента функции $y = f(x)$ бесконечно (все неотрицательные числа, не превосходящие 24). Очевидно, что непосредственно указать все пары соответствующих значений аргумента и функции невозможно. В таких случаях иногда составляют таблицу значений функции, соответствующих лишь некоторым из допустимых значений аргумента.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
y	-2	-4	-3,5	-1,8	2	4	6	6,5	7	5	2,5	0	-3

Если брать значения x и y за абсциссу и ординату точки, то каждой паре значений аргумента и функции будет соответствовать единственная точка координатной плоскости (рис. 11).

Если бы таблица была составлена с шагом, равным 1, мы получили бы больше точек координатной плоскости (рис. 12).



Рис. 11



Рис. 12



Рис. 13



Рис. 14

Вообще, с уменьшением шага таблицы мы получаем на координатной плоскости все больше и больше точек, абсцисса каждой из которых является значением аргумента, а ордината — соответствующим ему значением функции (рис. 13).

Можно заметить, что точки все гуще располагаются на некоторой плавной линии (рис. 14).

Эту линию называют *графиком температуры*. Каждая ее точка имеет абсциссу, равную допустимому значению аргумента, и ординату, равную соответствующему значению функции.

Заметим, что примерный график температуры можно было бы получить, соединив плавной линией точки, изображенные, например, на рисунке 13.

Графиком функции называется множество точек координатной плоскости, абсциссы которых являются значениями аргумента, а ординаты — соответствующими им значениями функции.

На практике для построения графика функции обычно составляют таблицу значений функции с большим или меньшим шагом в зависимости от требуемой точности, отмечают на координатной плоскости соответствующие точки и соединяют их плавной линией.

График функции дает наглядное представление о характере изменения значений функции. Так, по графику температуры можно определить, когда температура повышалась, понижалась, была отрицательной, положительной, равной нулю и т. п. Мы видим (рис. 14), что от 0 ч до 2 ч и от 16 ч до 24 ч температура понижалась, в 12 ч температура воздуха была равна 6°C , нулевая температура была в 7 ч и в 22 ч. Выше нуля температура была от 7 ч до 22 ч.

Графиками функций пользуются люди самых различных профессий: медики, экономисты, инженеры и техники, географы, химики и др.

Упражнения

130. 1) Длине стопы l (см) соответствует размер обуви n . По таблице значений функции $n = f(l)$ определите:

а) размер обуви, который соответствует стопе длиной: 25 см; 27 см;

б) длину стопы человека, который носит обувь: 35-го размера; 41-го размера.

l , см	22	23	23,5	24	25	25,5	26	26,5	27	27,5	28,5	29
n	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45

2) Возрасту ребенка t (в годах) соответствует его рост h (см). По таблице значений функции $h = g(t)$ определите:

а) рост ребенка в 3 года, в 7 лет, в 10 лет;

б) возраст ребенка, когда его рост был равен: 87 см, 113 см, 127 см, 136 см.

t , год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
h , см	70	80	87	94	99	107	113	120	127	132	136

131. Какие пары чисел, указанные в таблице:

x	-5	-1	0	1	2	4	5
y	-24	$\frac{1}{5}$	-1	1	1	3	$3\frac{5}{6}$

являются соответствующими друг другу значениями аргумента и функции:

а) $y = 3x - 9$;

в) $y = \frac{5x - 2}{x + 2}$;

б) $y = \frac{2x + 3}{5}$;

г) $y = \frac{x + 2}{3} + \frac{x - 2}{2}$?

132 Заполните таблицу значений функции.

1) Число сторон n выпуклого многоугольника соответствует число q его диагоналей (рис. 15). Функция $q = f(n)$ может быть задана формулой $q = \frac{1}{2}n(n-3)$.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
q										

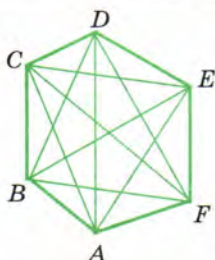


Рис. 15



Рис. 16

2) Число шаров m , расположенных в виде треугольника (рис. 16), соответствует числу шаров n в его стороне. Функция $m = g(n)$ может быть задана формулой $m = \frac{1}{2}n(n+1)$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m									

133. 1) Объему V (см³) воды в колбе соответствует высота H (мм) столба воды.

По графику функции $H = f(V)$ (рис. 17) найдите:

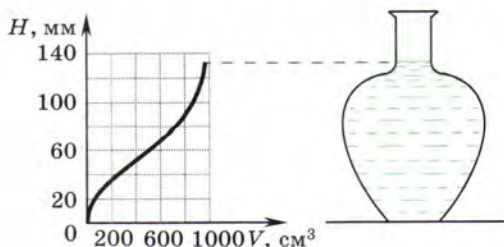


Рис. 17

а) высоту столба воды в колбе, если в нее налито: 200 см^3 , 500 см^3 , 800 см^3 воды;

б) объем воды в колбе, когда высота столба воды равна: 40 мм, 70 мм, 110 мм;

в) изменение высоты столба воды в колбе, когда объем воды в ней увеличился: от 100 до 200 см^3 , от 200 до 300 см^3 , от 300 до 400 см^3 , от 800 до 900 см^3 .

2) Объему V (л) воды в вазе соответствует высота H (мм) столба воды.

По графику функции $H = g(V)$ (рис. 18) определите:

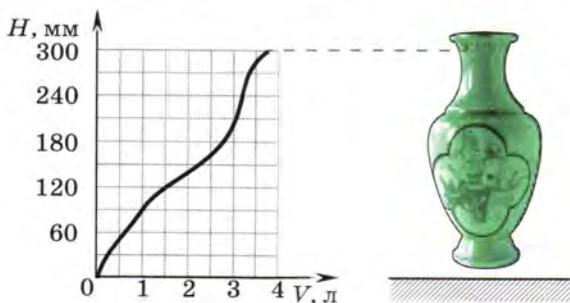


Рис. 18

а) емкость вазы, высоту вазы;

б) изменение уровня воды в вазе, если объем воды увеличился: от 0,5 до 1 л, от 1 до 1,5 л, от 1,5 до 2 л;

в) объем воды в вазе, когда высота столба воды равна: 70 мм, 150 мм, 200 мм;

г) ● высоту столба воды в вазе, если в нее налито: 200 см^3 , 500 см^3 , 1500 см^3 , 1800 см^3 воды.

134. ● На рисунке 19 изображены три сосуда и три графика, каждый из которых показывает, как зависит высота столба жидкости от объема V (см^3) жидкости в сосуде. Определите, какому сосуду какой график соответствует.

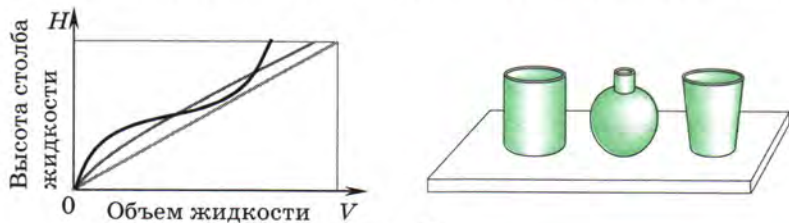


Рис. 19

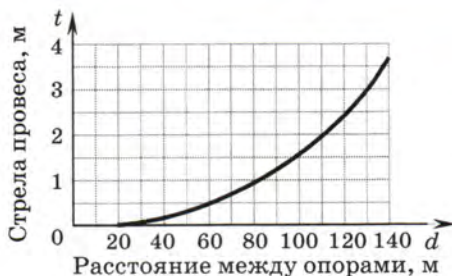
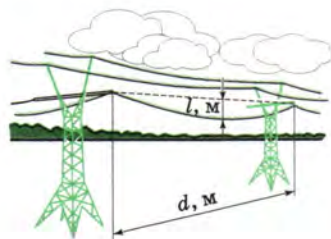


Рис. 20

135. 1) На рисунке 20 изображен график, показывающий, как зависит стрела провеса l (м) провода от расстояния d (м) между опорами линии электропередачи. Пользуясь графиком, заполните таблицу значений функции $l = f(d)$.

d , м	40	60	80	100	120	140
l , м						

- 2) На рисунке 21 изображен график, показывающий, как зависит атмосферное давление p (мм рт. ст.) от высоты H (км) над уровнем моря (Мирового океана). Пользуясь графиком, заполните таблицу значений функции $p = g(H)$.

H , км	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p , мм рт. ст.											

Сколько процентов от нормального (760 мм рт. ст.) давления составляют атмосферное давление на вершине Эльбруса — высочайшей горы Кавказа, высота которой равна 5630 м; на вершине Эвереста — высочайшей горы мира, высота которой равна 8848 м?

136. 1) Измеряя через равные промежутки времени температуру воды в баке, составили таблицу.

x , мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
y , °C	14	28	41	54	66	76	85	93	98	100	100	100

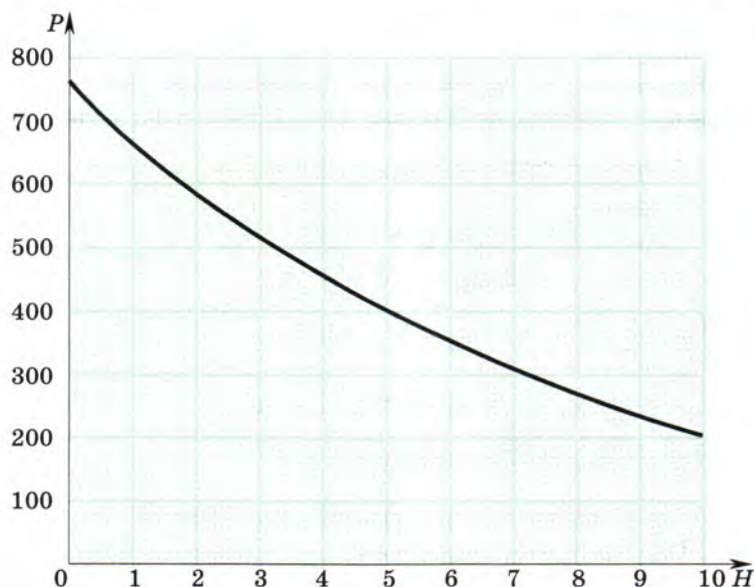


Рис. 21

Чему равен шаг этой таблицы? Постройте примерный график функции $y = f(x)$ (1 см на оси Ox соответствует 1 мин, 1 см на оси Oy соответствует 10°C). Используя график, ответьте на вопросы.

а) Какая температура воды была через: 4 мин; 5,5 мин; 9 мин; 10,5 мин после начала нагревания?

б) Через сколько минут после начала нагревания температура воды в баке стала равной:

41, 60, 93, 100°C ?

2) В колбу с питательной средой поместили бактерии. Увеличение числа бактерий показано в таблице, где буквой t обозначено время (в ч), а буквой n — число бактерий в колбе (в тыс. шт.).

t , ч	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6
n , тыс. шт.	1,4	1,8	2,2	2,8	3,5	4,4	5,6	7	8,8	9,4	9,6	9,1	7,3

Чему равен шаг таблицы? Постройте примерный график функции $n = g(t)$. Используя график, ответьте на вопросы.

а) Сколько бактерий стало в колбе через: 2,7 ч; 3,8 ч; 4,2 ч; 5,7 ч?

б) Через сколько часов число бактерий в колбе оказалось равным: 2,8 тыс. шт.; 6 тыс. шт.; 9 тыс. шт.; 8 тыс. шт.?

137. 1) Составьте таблицу значений функции y от x_1 до x_2 с шагом h :

а) $y = 3x$; $x_1 = -2$; $x_2 = 2$; $h = 0,5$;

б) $y = -3x$; $x_1 = -3$; $x_2 = 1$; $h = 0,5$;

в) $y = \frac{1}{x}$; $x_1 = 0,1$; $x_2 = 2$; $h = 0,1$;

г) $y = -\frac{1}{x}$; $x_1 = -2$; $x_2 = -0,1$; $h = 0,1$.

2) Постройте график функции y .

138. *1) Два автомобиля, расстояние между которыми 2100 м, движутся навстречу друг другу. Один из них идет со скоростью 20 м/с, а другой — со скоростью 15 м/с. Какое расстояние d (м) будет между автомобилями через t с?

По данным задачи заполните таблицу.

$t, \text{с}$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$d, \text{м}$											

Постройте график функции $d = f(t)$ (1 см на оси Ot соответствует 10 с, а 1 см на оси Od соответствует 200 м).

2) Из пункта M в пункт N со скоростью 5 км/ч отправился пешеход, а через 2 ч вслед за ним из M в N выехал велосипедист, двигавшийся со скоростью 9 км/ч. Какое расстояние s (км) будет между ними через t ч после выезда велосипедиста?

По данным задачи заполните таблицу значений функции $s = f(t)$.

$t, \text{ч}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$s, \text{км}$									

Постройте график функции $s = f(t)$ (1 см на оси Ot соответствует 0,5 ч, а 1 см на оси Os соответствует 2 км).

139. ○ Функция задана описанием: «Каждому натуральному числу, меньшему 10, ставится в соответствие остаток от деления этого числа на 5».

- 1) Каково множество допустимых значений аргумента этой функции?
- 2) Каково множество значений этой функции?
- 3) Задайте функцию таблицей.

! Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример задания функции таблицей.
2. Что понимают под графиком функции?
3. По графику функции $H = g(V)$ (рис. 22) составьте таблицу значений функции H с шагом, равным 100.

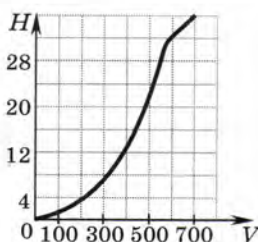


Рис. 22

§ 4. Функция $y = kx$

9. Пропорциональные переменные

Рассмотрим несколько задач.

✓ **Задача 1.** Мотоциклист двигался со скоростью 16 м/с в течение t с. Сколько метров проехал он за это время?

Решение. При равномерном движении пройденный путь s равен произведению скорости и времени движения:

$$s = 16t.$$

Полученная формула задает функцию s , значения которой получаются из соответствующих значений аргумента t умножением на число 16. По смыслу задачи переменная t может принимать только положительные значения.

✓ **Задача 2.** Найти массу m (г) алюминиевого провода, объем которого V (см³).

Решение. Масса вещества равна произведению его плотности и объема. Найдя в таблице плотностей (см. раздел «Справочные материалы») плотность алюминия, равную 2,7 г/см³, получим:

$$m = 2,7V.$$

Чтобы получить значение функции m , нужно соответствующее ему значение аргумента V умножить на число 2,7. И в этой задаче допустимы только положительные значения аргумента V .

 **Задача 3.** Купили n карандашей по 3 р. Сколько заплатили за покупку?

Решение. Обозначим буквой P стоимость покупки в рублях, тогда

$$P = 3n.$$

Формула задает функцию P , значения которой равны произведению соответствующих значений аргумента n на число 3. В этой задаче аргумент n может принимать только натуральные значения.

Общим для рассмотренных задач является то, что значения функции в каждом случае получаются умножением соответствующих им значений аргумента на число, отличное от нуля. Обозначив это число буквой k , а аргумент и функцию, как это принято в математике, буквами x и y , получим общий вид рассмотренных формул:

$$y = kx, \text{ где } k \neq 0.$$

Правая часть этой формулы имеет смысл при всех значениях x , значит, она задает функцию, аргумент которой может принимать любые значения.

Возьмем два отличных от нуля значения аргумента: x_1 и x_2 . Соответствующие им значения функции: $y_1 = kx_1$ и $y_2 = kx_2$. Из этих равенств получим $\frac{y_1}{x_1} = k$ и $\frac{y_2}{x_2} = k$. Значит,

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Любые две пары соответствующих друг другу значений x и y функции $y = kx$ составляют пропорцию.

Такие переменные называют **пропорциональными**.

Число k в формуле $y = kx$ называют **коэффициентом пропорциональности**.

В рассмотренных задачах коэффициентами пропорциональности являлись соответственно числа 16, 2,7 и 3.

В математике и физике иногда приходится заполнять таблицы значений двух пропорциональных переменных.

✓ Пример. Заполнить таблицу значений пропорциональных переменных x и y .

x	0,6	1,2	2		
y			5	12	15

Решение. Так как переменные x и y пропорциональны, то зависимость между ними выражается формулой $y = kx$. В таблице приведена только одна пара соответствующих друг другу значений пропорциональных переменных. Подставив в формулу $y = kx$ указанную пару соответствующих друг другу значений переменных $x = 2$, $y = 5$, получим $5 = k \cdot 2$. Отсюда $k = 2,5$.

С помощью формулы $y = 2,5k$ найдем значения переменной y , соответствующие указанным в таблице значениям переменной x : $y = 2,5 \cdot 0,6 = 1,5$; $y = 2,5 \cdot 1,2 = 3$.

Выразим из формулы $y = 2,5k$ переменную x :

$$x = \frac{y}{2,5}, \text{ или } x = 0,4y.$$

Найдем значения переменной x , соответствующие указанным в таблице значениям переменной y :

$$x = 0,4 \cdot 12 = 4,8; \quad x = 0,4 \cdot 15 = 6.$$

Ответ:

x	0,6	1,2	2	4,8	6
y	1,5	3	5	12	15

Упражнения

140. Пропорциональны ли:

- 1) масса сахарного песка и его стоимость;
- 2) время движения с постоянной скоростью и пройденный путь;
- 3) масса медного провода и его длина;
- 4) площадь квадрата и длина его стороны;
- 5) периметр квадрата и длина его стороны;
- 6) масса аквариума с водой и объем воды в нем;
- 7) масса коробки с конфетами и число конфет в ней;

8) стоимость всех проданных на определенный сеанс в кинотеатр билетов и число зрителей, если:

- все билеты имеют одну и ту же цену;
- цена билета зависит от места;
- рост человека и его возраст;
- масса человека и его рост?



Рис. 23

141. Решите задачу и запишите формулу зависимости между величинами в виде $y = kx$.

- Вертикальный столб высотой 6,5 м отбрасывает тень длиной 10,5 м. Определите высоту ели, длина тени которой равна 42 м (рис. 23).
- 2,7 м ткани стоят 91,8 р. Сколько стоят 14,5 м той же ткани?
- 25,2 см³ поваренной соли имеют массу 55,44 г. Какова масса 125 см³ поваренной соли?
- Масса свинцовой пластины объемом 68 см³ равна 768,4 г. Определите объем свинцового слитка массой 7,232 кг.
- Велосипедист рассчитывал проехать 40 км не более чем за 3 ч 30 мин. Первые 15 км он проехал за 1 ч 15 мин. Уложится ли велосипедист в намеченный срок, если продолжит движение с той же скоростью?
- На покраску пола в 15-метровой комнате пошло 2,7 кг краски. Хватит ли 8 кг краски на 44-метровую комнату (расход краски на 1 м² считать постоянным)?

142. 1) Найдите плотность меди в таблице плотностей (см. раздел «Справочные материалы»), заполните таблицу зависимости массы медного слитка от его объема.

$V, \text{см}^3$	1	2	3	4	5	10	20	30	40
$m, \text{г}$									

2) Автобус движется равномерно со скоростью 48 км/ч. Заполните таблицу зависимости пройденного автобусом пути s (км) от времени движения t (ч).

$t, \text{ч}$	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
$s, \text{км}$								

143. Заполните таблицу.

1)

x	0	1,6	2	4	4,8				80
$y = 2,5x$						30	40	75	

2)

x	-12	-9	-6	0	3	6			
$y = -\frac{5}{6}x$							15	20	40

144. Найдите коэффициент пропорциональности k и заполните пустые клетки таблицы.

1)

x	1,2	2	3,6	5				60
$y = kx$	6				2,4	3,6	12	

2)

x			$\frac{1}{2}$		-1	$-\frac{5}{3}$	-9	$-10\frac{1}{3}$
$y = kx$	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$				

3)

x	-3,6		7	11,8			42,4	60
$y = kx$		-1,5	8,75		17	33,75		

4)

x	-5	-2	0	4	25			100
$y = kx$					12	15	21	

145. 1) Зависимость между переменными x и y выражена формулой $y = 2,5x$, а зависимость между переменными x и z выражена формулой $x = 6z$. Пропорциональны ли переменные y и z ?

2) Зависимость между переменными y и x выражена формулой $y = -0,5x$, а зависимость между переменными y и z выражена формулой $y = -1,5z$. Пропорциональны ли переменные x и z ?

146. 1) Латунь — сплав меди с цинком, причем цинк и медь входят в нее в отношении 2 : 3. Сколько меди и сколько цинка содержится в куске латуни, масса которого равна 70 кг?

2) Бронза — это сплав олова и меди. Сколько олова и сколько меди содержится в куске бронзы массой 160 кг, если олово и медь входят в нее в отношении 3 : 17?

147. 1) На рисунке 24 изображена прямая, проходящая через начало координат.

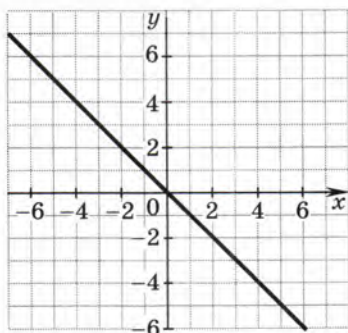


Рис. 24

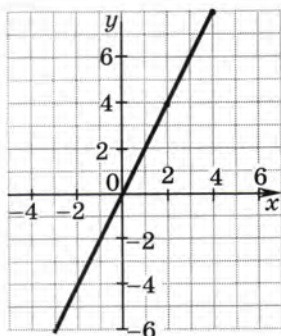


Рис. 25

Пользуясь этим графиком, заполните таблицу значений функции y .

x	-3	-1	0	2	3	3,5	4	4,5	6
y									

Можно ли зависимость между ординатами и абсциссами точек графика, указанными в таблице, записать в виде формулы $y = kx$?

2) Решите такую же задачу, воспользовавшись графиком, изображенным на рисунке 25 (значения x выберите сами).



Контрольные вопросы и задания

- Какой формулой выражается зависимость между пропорциональными переменными?
- Приведите примеры пропорциональных переменных.
- Решите задачу. Масса 15,5 л керосина равна 12,4 кг. Какова масса 20 л керосина?

10. График функции $y = kx$

Наглядное представление о характере изменения значений функции можно получить с помощью ее графика. Построим, например, график функции $y = 0,5x$. Составим таблицу значений этой функции с шагом 1.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y = 0,5x$	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Отметим на координатной плоскости точки, абсциссами которых служат значения x из таблицы, а ординатами — соответствующие им значения y (рис. 26).

Уменьшая шаг таблицы, мы получаем на координатной плоскости больше точек графика функции $y = 0,5x$ (рис. 27).

Можно заметить, что точки все гуще располагаются на некоторой прямой, проходящей через начало координат. Эта прямая (рис. 28) и является графиком функции $y = 0,5x$.

Графиком функции $y = kx$, где k — некоторое число, является прямая, проходящая через начало координат.

Зная, что график функции $y = kx$ — прямая, мы можем его построить, не составляя подробной таблицы. Действительно, для построения прямой достаточно знать две ее точки. Одна из них — начало координат. Остается найти координаты еще одной точки, отметить ее на координатной плоскости и провести прямую через эту точку и начало координат.

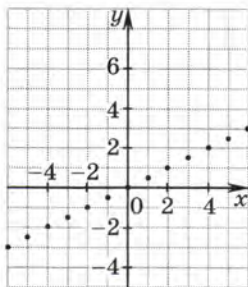


Рис. 26

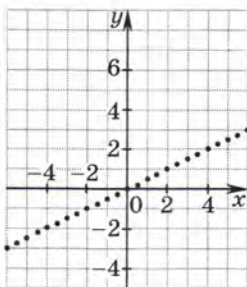


Рис. 27

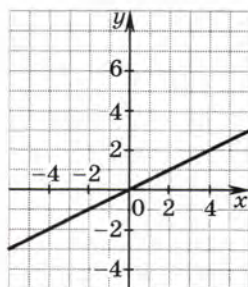


Рис. 28

Пример 1. Построить график функции $y = -\frac{2}{3}x$.

Решение.

① Возьмем какое-нибудь отличное от нуля значение x и вычислим соответствующее ему значение y (в данном случае удобно взять значение x , кратное 3, тогда значение y будет целым числом): при $x = 6$ имеем $y = -\frac{2}{3} \cdot 6 = -4$.

② Отметим на координатной плоскости точку с координатами $(6; -4)$.

③ Через эту точку и начало координат проведем прямую (рис. 29).

Эта прямая — график функции $y = -\frac{2}{3}x$.

На рисунке 30 изображены графики функций $y = kx$ с различными k .

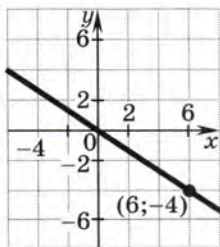


Рис. 29

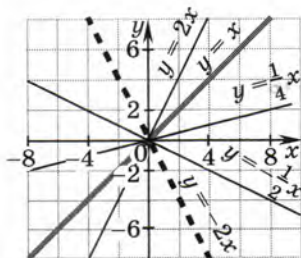


Рис. 30

Можно заметить, что при положительном k график функции $y = kx$ расположен в I и III, а при отрицательном k — во II и IV координатных четвертях.

Значения функции $y = 0 \cdot x$ ($k = 0$) при всех значениях x равны нулю, значит, график этой функции совпадает с осью абсцисс.

От коэффициента k зависит угол, образованный в верхней полуплоскости графиком функции $y = kx$ (обычно говорят: прямой $y = kx$) и полупрямой Ox . Коэффициент k называют *угловым коэффициентом прямой $y = kx$* .

Из определения графика функции следует, что *точка принадлежит графику функции в том и только в том случае, если ее координаты — соответствующие друг другу значения аргумента и функции.*

 **Пример 2.** Принадлежит ли точка $A(25; -10)$ графику функции $y = -0,4x$?

Решение. Подставив координаты точки в формулу $y = -0,4x$, получим верное равенство, если точка принадлежит графику, и неверное равенство, если точка не принадлежит графику: $-10 = -0,4 \cdot 25$.

Это равенство верно, значит, точка A принадлежит графику функции $y = -0,4x$.

 **Пример 3.** Прямая $y = kx$ проходит через точку $B(3; 7,5)$. Определить, чему равно k .

Решение. Координаты точки B должны удовлетворять уравнению $y = kx$, так как точка B принадлежит графику функции $y = kx$. Подставим координаты точки B в формулу $y = kx$ и найдем k : $7,5 = k \cdot 3$, $k = 2,5$.

Угловой коэффициент прямой $y = kx$, проходящей через точку B , равен $2,5$.

Упражнения

148. 1) Постройте график функции, заданной формулой $f(x) = 0,5x$.

2) Найдите по графику:

а) $f(5)$; $f(6,5)$; $f(7)$; $f(-4)$; $f(-1)$;

б) абсциссу точки графика, ордината которой равна: $2,5$; 0 ; -4 ; $-1,5$; $0,7$.

3) Проходит ли график через точку:

$A(6; 3)$; $B(-7; -3,5)$; $C(12,5; 25)$; $D(-78; -39)$?

149. 1) Постройте график функции, заданной формулой $f(x) = -2x$.

2) Найдите по графику:

а) $f(-2,5)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(3,5)$; $f(5)$;

б) абсциссу точки графика, если ее ордината равна: -4 ; -3 ; 1 ; 8 ; 9 ; 51 .

3) Проходит ли график через точку:

$A(-2; -4)$; $B(-3; 6)$; $C(5; -10)$; $D(55; -100)$; $E(-60; 120)$?

150. 1) Постройте график функции $y = \frac{3}{8}x$.

2) Найдите по графику значение функции при x , равном: 4 ; 6 ; 8 ; -4 .

3) При каком значении x значение функции равно: 0; -3; -6?

4) Назовите несколько пар целых чисел, больших 10, которые являются координатами точек этого графика.

5) Имеется ли на графике точка, абсцисса которой равна 100? Если имеется, то какая у нее ордината?

6) Проходит ли график через точку:

$A(10; 3,75)$; $B(-20; -7,5)$; $C(-0,42; 0,02)$?

151. Постройте график функции $y = -\frac{5}{6}x$.

1) Найдите по графику значение функции при x , равном: -3; -6; 9; 12.

2) При каком значении x точка графика имеет ординату, равную: 0; 2,5; -7,5?

3) Назовите несколько пар целых чисел, являющихся координатами точек этого графика.

4) Принадлежит ли графику точка:

$A(-0,024; 0,02)$; $B(240; -200)$; $C(30; 25)$?

152. Определите угловой коэффициент прямой $y = kx$, проходящей через точку:

1) $A(7; 14)$;

2) $B(-9; 27)$.

153. Прямая $y = kx$ проходит через точку $C(6; -4)$. Проходит ли эта прямая через точку $D(-9; 6)$?

154. График функции $y = kx$ проходит через точку $H(-12; -15)$.

Как, не вычисляя коэффициента k , определить, проходит ли этот график через точку $E(8; 10)$?

155. Функция $y = kx$ при $x = 1$ принимает значение, равное коэффициенту пропорциональности k . Пользуясь этим свойством, определите угловые коэффициенты прямых, изображенных на рисунке 31.

156. Лыжник вышел из пункта M и за x ч прошел y км. Зависимость пройденного пути от времени движения дана в таблице.

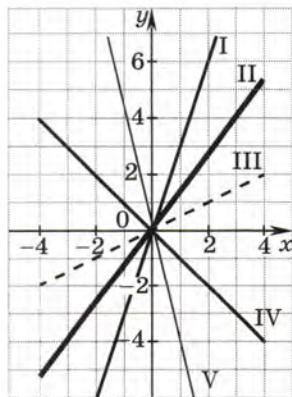


Рис. 31

§ 5. Линейная функция

1.1. Определение линейной функции

Задача 1. При отправлении телеграммы в 2003 г. взималась плата 80 к. за каждое слово и дополнительно 3 р. 15 к. Сколько рублей (n) стоило отправление телеграммы, содержащей m слов?

Решение. Так как за m слов отправитель должен уплатить $0,8m$ рублей, то стоимость P отправления телеграммы в m слов равна $(0,8m + 3,15)$ р.:

$$P = 0,8m + 3,15.$$

Например, если $m = 17$, то $P = 16,75$, если $m = 27$, то $P = 24,75$.

Каждому допустимому значению переменной m соответствует единственное значение переменной P , следовательно, формулой $P = 0,8m + 3,15$ задается функция.

Задача 2. Велосипедист должен проехать 45 км. Сколько километров (s) ему останется проехать через t ч, если он будет двигаться со скоростью 10 км/ч?

Решение. За t ч велосипедист проедет $10t$ км, и ему останется проехать $(45 - 10t)$ км:

$$s = 45 - 10t.$$

Так, при $t = 1,5$ получим $s = 30$; при $t = 2,5$ $s = 20$.

В этой задаче также каждому допустимому значению t соответствует единственное значение переменной s , и формулой $s = 45 - 10t$ задается функция.

В обеих задачах мы встретились с функциями, заданными формулами вида $y = kx + l$, где k и l — некоторые числа, а x и y — переменные.

В первой задаче $k = 0,8$ и $l = 3,15$. Во второй задаче $k = -10$ и $l = 45$.

Функция, заданная формулой вида $y = kx + l$, где k и l — некоторые числа, называется **линейной**.

Рассмотренная ранее функция $y = kx$ является частным случаем линейной функции, так как при $l = 0$ формула $y = kx + l$ принимает вид $y = kx$.

Упражнения

159. 1) Заполните таблицу зависимости стоимости отправления телеграммы от числа слов в ней (задача 1).

m — число слов	12	13	14	15	16	18	20	22	24
n — стоимость									

Пропорциональна ли стоимость отправления телеграммы числу слов в ней?

- 2) Заполните таблицу значений функции $s = 45 - 10t$ (задача 2).

t , ч	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2
s , км									

Пропорциональны ли переменные s и t ?

160. 1) Заполните таблицу.

а)

x	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12
$y = 1,5x + 6$									

б)

x	-4	-2	0	2	4	6	8	10	12
$y = -\frac{1}{6}x + 6$									

в)

x	-0,15	0	0,15	0,3	0,45	0,6	0,75	0,9
$y = 2,4x - 3$								

г)

x	-1,6	-1,2	-0,8	-0,4	0	0,4	0,8	1,2
$y = -1,25x - 5$								

2) Возьмите из какой-нибудь таблицы два любых значения x (x_1 и x_2) и соответствующие им значения y (y_1 и y_2). Проверьте, что для функции вида $y = kx + l$

имеет место соотношение $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = k$.

161. 1) В бассейне находится 240 м^3 воды. Каждую секунду из него откачивают по $0,1 \text{ м}^3$ воды. Сколько кубометров воды (V) останется в бассейне через t с? Задайте зависимость V от t формулой. Задаёт ли эта формула линейную функцию? Сколько кубометров воды останется в бассейне через: 17 с; 10 мин; 0,5 ч? Сколько понадобится времени, чтобы осушить бассейн?

2) В баке легкового автомобиля 18 л бензина. На каждый километр пути расходуется в среднем $0,08$ л бензина. Сколько литров (V) бензина останется в баке после прохождения s километров? Задайте формулой функцию V . Является ли эта функция линейной? Сколько литров бензина останется в баке через 15 км, через 90 км? Сколько километров может пройти автомобиль без заправки горючим?

162. 1) В баке, ёмкость которого 8 м^3 , находится 2 м^3 воды. Каждую минуту в бак поступает по $0,15 \text{ м}^3$ воды. Сколько кубометров (V) воды будет в баке через t мин? Задайте функцию V формулой. Сколько воды будет в баке через: 20 мин; 24 мин; 30 мин; 35 мин? Через сколько минут в баке будет: $3,5 \text{ м}^3$; $6,2 \text{ м}^3$ воды?

2) В цилиндрическое ведро высотой 30 см до уровня 10 см налита вода. В это ведро из крана поступает $0,25$ л воды в секунду. До какой высоты H (см) поднимется вода в ведре через t с, если 1 л воды поднимает уровень на 2 см? Задайте функцию H формулой. Каковы допустимые значения t ? До какой высоты поднимется вода через: 5 с; 15 с; 25 с; 40 с? Через сколько секунд вода в ведре поднимется до: 16 см; 24 см; 28 см?

163. 1) Линейная функция задана формулой $f(x) = kx + 12,5$. Найдите k , если $f(-10) = 72,5$.

2) Линейная функция задана формулой $f(x) = 2,8x + l$. Найдите l , если $f(5) = -16$.

164. Задайте линейную функцию $y = f(x)$ формулой, если известно, что:

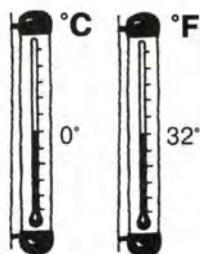
а) $f(3) = 4$, $f(5) = 0$; б) $f(-6) = 1$, $f(3) = 19$.

165. Найдите координаты точки пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, если:

1) $f(x) = 2,3x + 0,5$, $g(x) = 3,5 - 0,7x$;

2) $f(x) = \frac{4x - 5}{2}$, $g(x) = \frac{24 + 3x}{3}$.

166. Температура по шкале Кельвина связана с температурой по шкале Цельсия формулой $t^{\circ}\text{K} = t^{\circ}\text{C} + 273$, а переход от температуры по Цельсию к температуре по Фаренгейту, принятой в Англии и США, выражается формулой $t^{\circ}\text{F} = 1,8t^{\circ}\text{C} + 32$. Запишите формулу перевода температуры по Кельвину в температуру по Фаренгейту.



! Контрольные вопросы и задания

1. Какая функция называется линейной?
2. Приведите примеры линейных функций.
3. Зная, что $f(x) = -\frac{3}{7}x + 6$, найдите: $f(0)$; $f(2)$; $f(-14)$.

12. График линейной функции

Рассмотрим две функции: $y = 0,5x + 2$ и $y = 0,5x$.

Графиком функции $y = 0,5x$ является прямая, проходящая через начало координат. При любом значении x выражение $0,5x + 2$ принимает значение большее, чем выражение $0,5x$, на 2 единицы. Поэтому каждой точке графика функции $y = 0,5x$ соответствует точка графика функции $y = 0,5x + 2$, имеющая ту же абсциссу, а ординату на 2 единицы большую. Значит, каждая точка графика функции $y = 0,5x + 2$ получается сдвигом соответствующей точки графика функции $y = 0,5x$ на 2 единицы вверх, т. е. график функции $y = 0,5x + 2$ получается сдвигом прямой $y = 0,5x$ на 2 единицы вверх (рис. 32). Графиком функции $y = 0,5x + 2$ является прямая, параллельная прямой $y = 0,5x$.

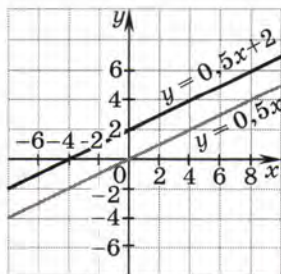


Рис. 32

График функции $y = kx + l$ — прямая, параллельная прямой $y = kx$.

График функции $y = kx + l$ называется прямой $y = kx + l$. При $k = 0$ графиком функции $y = kx + l$ является множество точек с ординатами, равными l : при $l = 0$ это ось абсцисс, при других l — прямые, параллельные оси абсцисс (рис. 33).

Для построения графика линейной функции достаточно найти координаты двух его точек, отметить эти точки на координатной плоскости и провести через них прямую.

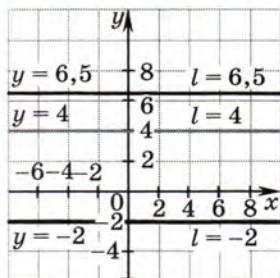


Рис. 33

✓ Пример 1. Построить график функции $y = 1,5x - 6$.

Решение.

① Возьмем два каких-либо значения x и вычислим соответствующие им значения y :

при $x = 0$, $y = -6$; при $x = 6$, $y = 3$.

② Отметим на координатной плоскости точки $A(0; -6)$ и $B(6; 3)$.

③ Проведем через эти точки прямую (рис. 34). Эта прямая и есть искомым график.

При построении графика мы взяли за одну из точек искомой прямой точку ее пересечения с осью ординат (точку A).

Заметим, что прямая $y = kx + l$ пересекает ось ординат в точке с координатами $(0; l)$.

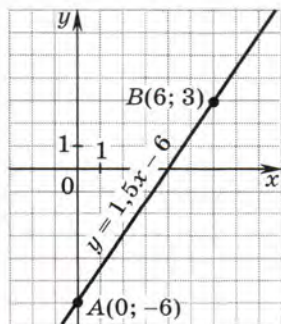


Рис. 34

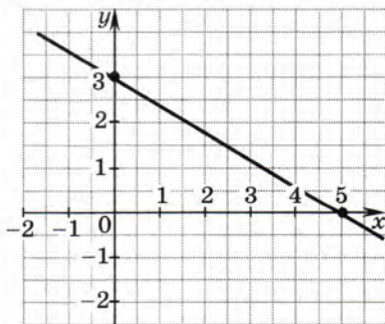


Рис. 35



Пример 2. Задать формулой функцию, график которой изображен на рисунке 35.

Решение. На рисунке изображена прямая. Она является графиком функции $y = kx + l$. Эта прямая пересекает ось ординат в точке с координатами $(0; 3)$. Значит, $l = 3$.

Для нахождения k (коэффициент k называют угловым коэффициентом прямой $y = kx + l$) определим координаты еще одной точки данной прямой, например $B(5; 0)$, и подставим их в формулу $y = kx + 3$:

$$0 = k \cdot 5 + 3; k = -\frac{3}{5}.$$

Значит, формула, задающая функцию, график которой изображен на рисунке 35, имеет вид $y = -\frac{3}{5}x + 3$.

Упражнения

167. Как расположен относительно прямой $y = -3x$ график функции:

1) $y = -3x + 1$; 2) $y = -3x - 4$?

168. 1) Постройте график функции $y = -2x + 6$. Используя построенный график, определите:

а) какое значение принимает функция при x , равном: $-1,5; 0; 2,5; 5; 6,5$;

б) при каком значении аргумента значение функции равно: $-5; -1; 0; 3$.

2) Постройте график функции $y = \frac{2}{3}x - 4$. Используя построенный график, определите:

а) какое значение принимает функция при x , равном: $-3; -1; 0; 2,5; 5; 7,5$;

б) при каком значении аргумента значение функции равно: $-6; -1; 0; 0,5$.

169. 1) Постройте график функции $y = -\frac{6}{7}x + 3$. Найдите по графику:

а) координаты точек его пересечения с осями координат;

б) значение функции при x , равном: $-3,5; 10,5$;

в) значение аргумента, которому соответствует значение функции, равное: $1; 12$.

г) Есть ли на графике точки, обе координаты которых — целые числа? Если есть, то сколько таких точек?

2) Постройте график функции $y = \frac{3}{4}x - 1$. Найдите по графику:

а) координаты его точек пересечения с координатными осями;

б) значение функции при x , равном: -4 ; -6 ; 2 ; 8 ;

в) значение аргумента, которому соответствует значение функции, равное: 1 ; 2 ; 5 .

г) Есть ли на графике точки, обе координаты которых — натуральные числа? Если есть, то сколько таких точек?

170. 1) Постройте прямую $y = -3x + 5$. Пользуясь построенным графиком, определите, на сколько убывает значение функции, если значение аргумента возрастает на 1:

а) от -2 до -1 ; в) от 2 до 3 ; д) от -1 до 0 ;

б) от 0 до 1 ; г) от 4 до 5 ; е) от 1 до 2 .

2) Постройте прямую $y = 2x - 7$. Пользуясь построенным графиком, определите, на сколько возрастает значение функции, если значение аргумента возрастает на 1:

а) от 0 до 1 ; в) от 2 до 3 ;

б) от 1 до 2 ; г) от 3 до 4 .

3) На сколько изменяется значение функции $y = kx + l$:

а) при увеличении ее аргумента на 1;

б) при уменьшении ее аргумента на 1?

171. Найдите k и l , если известно, что прямая $y = kx + l$ параллельна прямой $y = 0,3x$ и проходит через точку:

1) $A(0; 7)$; 2) $B(0; 8)$; 3) $C(2; 5)$; 4) $D(-5; 6)$.

172. Найдите k и l , если известно, что прямая $y = kx + l$:

1) параллельна прямой $y = 0,75x + 11$ и проходит через точку: а) $K(8; 1)$; б) $M(4; 9)$;

2) параллельна прямой $y = -\frac{3}{7}x - 6$ и проходит через точку: а) $P(7; 4)$; б) $E(3; 0)$.

173. Изобразите, как примерно выглядит график функции $y = kx + l$, если:

1) $k > 0, l > 0$; 4) $k < 0, l < 0$; 7) $k = 0, l > 0$;

2) $k < 0, l > 0$; 5) $k > 0, l = 0$; 8) $k = 0, l < 0$;

3) $k > 0, l < 0$; 6) $k < 0, l = 0$; 9) $k = 0, l = 0$.

174. Определите знаки чисел k и l , если график функции $y = kx + l$ расположен:

- 1) в I, II и III;
- 2) в I, II и IV;
- 3) в I, III и IV;
- 4) во II, III и IV координатных четвертях.

175. Может ли график линейной функции располагаться только:

- 1) в I и II координатных четвертях;
- 2) во II и IV координатных четвертях;
- 3) в III и IV координатных четвертях;
- 4) в I и III координатных четвертях;
- 5) в I и IV координатных четвертях;
- 6) во II и III координатных четвертях?

176.* Выясните с помощью графиков, содержат ли следующие таблицы значения линейных функций. Если содержат, то задайте линейные функции формулами.

1)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-1,4	-0,6	0,2	1	1,8	2,6	3,4	4,2	5

2)

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	-9,6	-7,8	-6	-4,2	-2,4	-0,6	1,2	3	4,8

3)

x	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
y	10	4,5	0	-3,5	-6	-7,5	-8	-10	-12

4) ☐

x	-6	-5	-3,6	-2,4	0,4	6,4	8	10
y	5,5	6,25	7,3	8,2	9,7	5,2	4	2,5

177. В результате взвешивания получили таблицу зависимости массы m (кг) бидона с керосином от объема керосина V (л) в нем.

V , л	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
m , кг	1,12	1,52	1,92	2,33	2,72	3,11	3,53	3,92

Покажите с помощью графика, что m является линейной функцией. Задайте эту функцию формулой. Найдите массу пустого бидона и массу 1 л керосина.

178. 1) В баллоне содержится 1,8 кг жидкого пропана. Сколько килограммов (n) пропана останется в баллоне через t ч работы газовой плитки, расходующей в час 0,15 кг пропана?

Постройте график функции n (1 см на оси t соответствует 1 ч, а 1 см на оси n соответствует 0,1 кг). Найдите по графику:

- а) сколько килограммов пропана останется в баллоне через: 4 ч; 6 ч; 7 ч работы плитки;
б) через сколько часов в баллоне останется пропана: 0,6 кг; 0,3 кг.

2) Турист выехал на мопеде из пункта A в пункт B , расстояние до которого по шоссе равно 120 км. Сколько километров (s) останется проехать туристу через t ч после отправления из A , если он будет двигаться равномерно со скоростью 24 км/ч?

Постройте график функции s (1 см на оси t соответствует 0,5 ч, а 1 см на оси s соответствует 10 км). Найдите по графику:

- а) сколько километров останется проехать туристу через: 3,5 ч; 4 ч; $4\frac{1}{4}$ ч после отправления из пункта A ;
б) через сколько часов после отправления из пункта A туристу останется проехать: 72 км; 36 км; 12 км.

179. Пружина под действием силы тяжести подвешенного к ней груза удлиняется, причем удлинение пропорционально массе груза. На рисунке 36 показано, как удлиня-

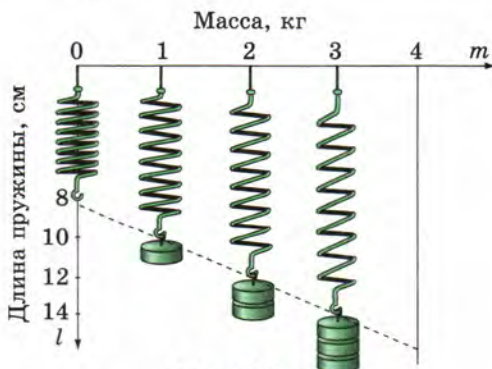


Рис. 36

ется восьмисантиметровая пружина при некоторых нагрузках (массе в 1 кг соответствует сила тяжести, приближенно равная 10 Н). Постройте график функции l (длина пружины, см), аргумент которой m (масса груза, кг), считая предельную нагрузку равной 50 Н.

180. В коробке лежат гвозди, масса каждого из которых 4 г. Зная, что масса пустой коробки равна 50 г, определите массу коробки, в которой находится n гвоздей. Постройте график функции $m = f(n)$ (m — масса коробки с гвоздями, г), 1 см на оси n соответствует 5 гвоздям, а 1 см на оси m соответствует 20 г.

181. 1) Определите, не выполняя построения графика функции $y = \frac{3}{4}x + 9$:

а) координаты точек пересечения графика с осями координат;

б) принадлежат ли графику точки:

$A(100; 84)$, $B(-0,05; -7,9)$, $C(-30; 30,5)$;

в) есть ли на графике точка, абсцисса которой равна ее ординате.

2) Определите, не выполняя построения графика функции $y = -\frac{2}{5}x - 8$:

а) координаты точек пересечения графика с координатными осями;

б) принадлежат ли графику точки:

$A(50; 12)$, $B(-0,05; -7,9)$, $C(52; 28)$;

в) есть ли на графике точка, абсцисса и ордината которой — противоположные числа.

182. 1) Прямая $y = 3x + l$ проходит через точку $A(17; 30)$. Найдите l и определите, проходит ли эта прямая через точку $B(25; 54)$.

2) Прямая $y = -2,5x + l$ проходит через точку $M(-20; 66)$. Найдите l и определите, проходит ли эта прямая через точку $C(20; 7)$.

183. Пересекаются ли графики функций:

1) $y = 2x + 3$ и $y = 2x + 5$; 3) $y = -3x + 5$ и $y = -3x$;

2) $y = 2x + 3$ и $y = x - 2$; 4) $y = 4 - x$ и $y = 4 - 2x$?

Если графики пересекаются, найдите точку пересечения.



Контрольные вопросы и задания

1. Что представляет собой график линейной функции?
2. В чем особенность расположения графиков функции вида $y = kx + l$:
а) при одном и том же k и различных l ;
б) при одном и том же l и различных k ?
3. Найдите координаты точек, в которых график линейной функции $y = 0,45x + 3,6$ пересекает оси координат.

13. График линейного уравнения с двумя переменными

Функцию $y = kx + l$ называют линейной потому, что ее графиком является прямая линия. С другой стороны, уравнение $y = kx + l$, задающее линейную функцию, является частным случаем уравнения с двумя переменными $ax + by = c$. Если коэффициент b при y в этом уравнении отличен от нуля, то делением на b и переносом члена, содержащего x , в правую часть можно получить из уравнения $ax + by = c$ равносильное ему уравнение $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Как мы говорили, это уравнение задает на координатной плоскости прямую линию, а значит, эту же прямую задает и уравнение $ax + by = c$.

Уравнение $ax + by = c$ называют
линейным уравнением с двумя переменными.

Графиком уравнения называют множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями уравнения.



Пример 1. Построить график уравнения $3x + 2y = 4$.

Решение 1. Перенесем $3x$ в правую часть, разделим уравнение на 2, в результате получим равносильное уравнение $y = -\frac{3}{2}x + 2$. Это уравнение задает линейную функцию,

графиком которой является прямая (рис. 37). Эта прямая и является графиком уравнения $3x + 2y = 4$.

Решение 2. Мы знаем, что графиком данного уравнения является прямая, а для построения прямой достаточно знать две ее точки. Найдем точки пересечения прямой с осями координат: 1) при $x = 0$ имеем: $3 \cdot 0 + 2y = 4$, $y = 2$; 2) при $y = 0$ имеем: $3x + 0 \cdot y = 4$, $x = \frac{4}{3}$.

Отметим на координатной плоскости точки $A(0; 2)$ и $B(\frac{4}{3}; 0)$ и проведем через них прямую AB , которая и является искомым графиком.

Рассмотрим теперь случай, когда в уравнении $ax + by = c$ коэффициент b равен нулю: $ax + 0 \cdot y = c$.

Можно считать, что в этом случае мы имеем уравнение с одной переменной: $ax = c$. Если a не равно нулю, то у уравнения есть единственный корень $x = \frac{c}{a}$. График этого уравнения

состоит из точек, абсциссы которых равны $\frac{c}{a}$, т. е. является прямой¹, параллельной оси ординат (рис. 38) или (при $c = 0$) совпадающей с ней.

Аналогично, если в уравнении $ax + by = c$ нулю равно a , а $b \neq 0$, получим уравнение $by = c$, график которого является прямой $y = \frac{c}{b}$, параллельной оси абсцисс или совпадающей с этой осью.

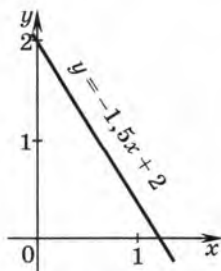


Рис. 37

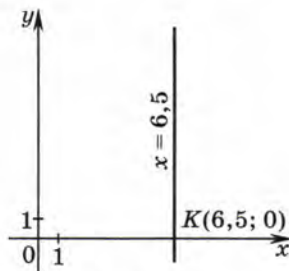


Рис. 38

¹ Поэтому и уравнение $ax = c$ тоже называют линейным.

Мы рассмотрели случаи, когда в линейном уравнении хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Графиком такого уравнения является прямая. Если же оба коэффициента при переменных x и y равны нулю, получаем уравнение $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$.

Если $c \neq 0$, например $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$, то ни при каких значениях переменных левая часть равенства не равна правой, а значит, график этого уравнения не содержит ни одной точки.

Графиком уравнения $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ является вся координатная плоскость, так как при любых значениях переменных получается верное равенство $0 = 0$.

Умение строить графики линейных уравнений помогает при решении систем уравнений с двумя переменными.



Пример 2. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = 12, \\ 5x - 4y = 2. \end{cases}$

Решение. Решением системы являются координаты общих точек графиков ее уравнений. Построим графики уравнений системы и определим координаты их общей точки.

Прямая $2x + 3y = 12$ пересекает координатные оси в точках $(0; 4)$ и $(6; 0)$, а прямая $5x - 4y = 2$ проходит через точки $(-2; -3)$ и $(2; 2)$ (рис. 39).

Прямые пересекаются в точке $C(x_C; y_C)$, где $x_C \approx 2,3$, $y_C \approx 2,5$.

Ответ: $x \approx 2,3$, $y \approx 2,5$.

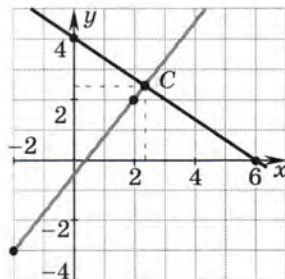


Рис. 39

З а м е ч а н и е. При построении графиков всегда имеются некоторые погрешности, а значит, с помощью графиков решить систему уравнений можно только приближенно. Поэтому графический способ решения применяют в случаях, когда высокая точность не нужна.

Особенно удобно с помощью графиков выяснять, сколько решений имеет система уравнений.

Графики уравнений системы $\begin{cases} ax + by = c, \\ px + qy = r \end{cases}$ могут оказать-

ся либо пересекающимися, либо параллельными прямыми

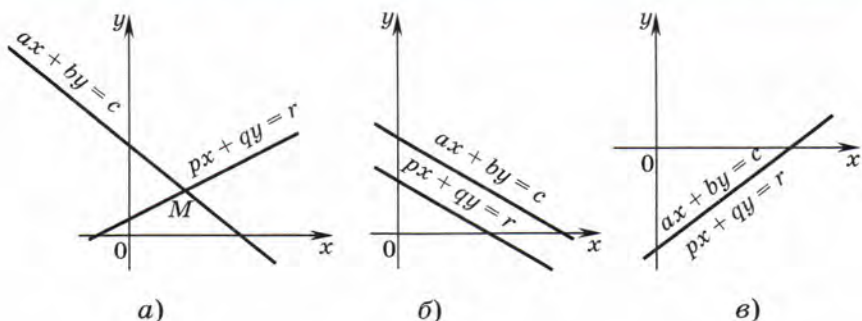


Рис. 40

(рис. 40, а, б), либо совпадать (рис. 40, в). В первом случае система имеет единственное решение, во втором — не имеет решений, а в третьем случае у системы бесконечное множество решений.

Система, имеющая бесконечное множество решений, состоит из двух равносильных друг другу уравнений, например $\begin{cases} x + 2y = 7, \\ 2x + 4y = 14. \end{cases}$ Легко видеть, что второе уравнение системы получено из первого умножением на 2. Каждое решение первого уравнения является и решением второго уравнения, а значит, является решением всей системы. Система оказалась равносильна уравнению $x + 2y = 7$, которое имеет бесконечно много решений. Возникает вопрос, как эти решения записать. Можно поступить так: выразить одну переменную через другую, например x через y , и указать, что y может принимать любое значение: $x = 7 - 2y$, где y — любое число.

Упражнения

184. Замените данное уравнение равносильным ему уравнением вида $y = kx + l$:

- | | |
|-------------------------------|--------------------------|
| 1) $3x + 2y = 48$; | 4) $7x - 0,15y = -0,1$; |
| 2) $5x - 3y = 60$; | 5) $3 - 2y = 0$; |
| 3) $4x + \frac{1}{3}y = 10$; | 6) $10x - 1 = 0$. |

185. Какие из графиков линейных уравнений — параллельные прямые:

- | | |
|--------------------|-----------------------|
| 1) $2x - 7y = 3$; | 3) $4x + 14y = -1$; |
| 2) $2x + 7y = 5$; | 4) $10x - 35y = 19$; |

186. Запишите уравнение прямой, которая получится в результате сдвига прямой:

1) $y = 2x$ на 2 единицы:

а) вверх; б) вниз; в) ☒ вправо; г) ☒ влево;

2) $y = -\frac{1}{3}x$ на 3 единицы:

а) вверх; б) вниз; в) ☒ вправо; г) ☒ влево.

187. Запишите уравнение прямой: 1) параллельной; 2) перпендикулярной прямой $y = x$, которая проходит через точку:

а) $(0; 2)$; б) $(0; -2)$; в) ☒ $(2; 0)$; г) ☒ $(-2; 0)$.

188. Постройте прямую:

1) $3x - y = 8$;

4) $3x - 4y = -6$;

2) $4x + y = 10$;

5) $0 \cdot x - 3y = 9$;

3) $-2x + 5y = 15$;

6) $5x + 0 \cdot y = 15$.

189. 1) Постройте прямую, заданную уравнением:

а) $2x + 3y = 12$;

б) $3x + 5y = 30$.

2) Найдите по графику все пары целых неотрицательных значений переменных, которые являются решениями этого уравнения.

190. Составьте уравнение по условию задачи, постройте его график и, если возможно, найдите все решения задачи.

1) Ученик купил несколько тетрадей и карандашей, заплатив за покупку 23 р. Цена тетради 2 р., а цена карандаша 3 р. Сколько тетрадей и карандашей было куплено учеником?

2) Монету в 50 к. нужно разменять трехкопеечными и пятикопеечными монетами. Сколько для этого может понадобиться трехкопеечных и пятикопеечных монет?

191. Проходит ли график уравнения $6x - 7y = 19$ через точку:

а) $A(16; 11)$;

в) $C(-26; -25)$;

б) $B(23; 17)$;

г) $D(-55; 7)$?

192. 1) Прямая $5x - 7y = c$ проходит через точку $A(2, 4; 1)$. Найдите c .

2) Прямая $6x + 5y = c$ проходит через точку $A(-7; -5, 6)$. Найдите c .

3) Прямая $6x + by = 71$ проходит через точку $D(23; 5)$. Найдите b .

4) Прямая $ax - 15y = 45$ проходит через точку $C(10; 13)$.
Найдите a .

193. 1) При каком значении b прямая $4x + by = 27$ проходит через точку $A(4; -1)$? Проходит ли она в этом случае через точку: а) $E(-14; 21)$; б) $F(26; 7)$?

2) При каком значении c прямая $3x + 7y = c$ проходит через точку $B(-5; 4)$? Проходит ли она в этом случае через точку: а) $K(23; -8)$; б) $M(-19; 10)$?

194. Является ли точка A точкой пересечения прямых $2x - 3y = 8$ и $3x + 2y = -1$:

а) $A(-2; -4)$;

в) $A(-1; -1)$;

б) $A(2; -3,5)$;

г) $A(1; -2)$?

195. Решите графически систему уравнений:

1) $\begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = 3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 5x - 2y = -1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - y = 8, \\ x + y = -3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 5x + 2y = -1, \\ 10x + y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 3y = -12, \\ 4x - 3y = 0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 0 \cdot x + 5y = 20, \\ -3x + 2y = -1; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x - 3y = 0, \\ 3x + 2y = 17; \end{cases}$

8) $\begin{cases} -3x + 0 \cdot y = 15, \\ 2x + 7y = 2. \end{cases}$

196. Имеет ли решение система уравнений:

1) $\begin{cases} y - 6x = 0, \\ 4x - y = -2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 0,2x + 0,3y = 0, \\ x + 1,5y = 4; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 5x + 3y = 24, \\ x + 12y = 36; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x = 11 - 3y, \\ 3y = 10 - 2x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1,5x - 4y = 1, \\ 8y = 3x - 2; \end{cases}$

6) $\begin{cases} 3x = 1 - 2y, \\ 2y = 16 - 3x? \end{cases}$

197. Сколько решений имеет система:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y = 2x + 3, \\ y = -2x - 3; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - y + 2 = 0, \\ 3x - y + 4 = 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = 3y - 5, \\ x = \frac{3y - 5}{2} ? \end{cases}$

198. 1) Найдите координаты точки пересечения прямых $2x - 7y = 1$ и $x + 2y = -5$ и определите, проходит ли через эту точку прямая $3x - 8y = -1$.

2) Найдите координаты точки пересечения прямых $x + 2y = 0$ и $3x + 7y = 2$ и определите, проходит ли через эту точку прямая $-2x + y = -10$.

199. Имеет ли решение система трех линейных уравнений:

$$1) \begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 3y = 0, \\ x - y = 10; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 13, \\ 2x - y = 3? \end{cases}$$

200. Какими должны быть числа a , b и c , чтобы график уравнения $ax + by = c$:

1) был параллелен оси ординат;

2) был параллелен оси абсцисс;

3) проходил через начало координат;

4) располагался в I, II и III координатных четвертях;

5) располагался во II, III и IV координатных четвертях?

201. 1) Назовите линейные уравнения (ответ обоснуйте):

$$y = 2x,$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 3,$$

$$x + y = 0,$$

$$\frac{2}{x} + y = 4,$$

$$\frac{y}{2} - \frac{x}{3} = 1,$$

$$x = 0,$$

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0,$$

$$x = -\frac{1}{7}y,$$

$$y^2 + x = 2,$$

$$y - 5x + 4 = 0,$$

$$y = 0,$$

$$2x + 6 = 0,$$

$$y = -3,$$

$$y - x^2 + 1 = 0,$$

$$5 - y = 0.$$

2) Что является графиком каждого из этих линейных уравнений? Какой из них не является графиком функции $y = kx + l$?

! Контрольные вопросы и задания

1. Как графически решить систему двух линейных уравнений с двумя переменными?

2. Сколько решений может иметь система двух линейных уравнений с двумя переменными? Приведите примеры.

3. Решите графически систему уравнений $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ x - y = 1. \end{cases}$

СТЕПЕНЬ С НАТУРАЛЬНЫМ ПОКАЗАТЕЛЕМ

§ 6. Степень и ее свойства

14. Тождества и тождественные преобразования

Решая текстовые задачи, раскрывая скобки и сокращая дроби, вы получали различные равенства с переменными. Обычно при рассмотрении равенства двух выражений с переменными возникает вопрос о значениях переменных, при подстановке которых из равенства с переменными получается верное числовое равенство. Рассмотрим три равенства:

$$1) x + y = xy; \quad 2) a(b + c) = ab + ac; \quad 3) \frac{5m^2}{m} = 5m.$$

В первое равенство можно подставлять любые значения переменных x и y . При этом получится либо верное, либо неверное числовое равенство. Так, например, при $x = 2$, $y = 2$ получим верное равенство $2 + 2 = 2 \cdot 2$, а при $x = 5$, $y = 3$ — неверное равенство $5 + 3 = 5 \cdot 3$.

Второе равенство, в отличие от первого, обращается в верное числовое равенство при любых значениях входящих в него переменных, так как оно — запись распределительного закона умножения, применимого к любым числам.

Третье равенство становится верным числовым равенством при любом, отличном от нуля значении переменной m , т. е. при *всех допустимых значениях* этой переменной.

Равенство, верное при любых допустимых значениях входящих в него переменных, называют **тождеством**.

Согласно этому определению, равенства 2 и 3 — тождества. Они верны при *всех допустимых значениях переменных*. В отличие от них, равенство 1 тождеством не является, так как *существуют допустимые значения* входящих в него пе-

ременных (например, $x = 5$, $y = 3$), при которых это равенство неверно.

Выражения, записанные в левой и правой частях тождества, называют **тождественно равными**.

К числу тождеств относятся все основные свойства арифметических действий, основное свойство дроби. С распределительным законом умножения вы в этом пункте уже встречались, напомним другие законы арифметических действий.

Переместительный закон

сложения
 $a + b = b + a$

умножения
 $ab = ba$

Сочетательный закон

сложения
 $a + (b + c) = (a + b) + c$

умножения
 $a(bc) = (ab)c$

Свойство нуля
 $a + 0 = a$

Свойство единицы
 $a \cdot 1 = a$

Правила знаков при умножении

$$(-a)b = -ab,$$

$$(-a)(-b) = ab$$

Из известных тождеств можно *вывести* другие тождества, такие, как, например, правило раскрытия скобок, которым мы неоднократно пользовались и которое еще много раз будем применять при решении различных задач. Рассмотрим выражение $a(b + c - d)$.

Запишем выражение, стоящее в скобках, в виде суммы двух выражений:

$$a(b + c - d) = a((b + c) + (-d)).$$

Применим распределительный закон:

$$a((b + c) + (-d)) = a(b + c) + a(-d).$$

Применим распределительный закон к выражению $a(b + c)$:

$$a(b + c) + a(-d) = ab + ac + a(-d).$$

К произведению $a(-d)$ применим правило знаков:

$$ab + ac + a(-d) = ab + ac - ad.$$

Все полученные равенства — тождества. Мы последовательно преобразовали выражение $a(b + c - d)$ в тождественно равное ему выражение $ab + ac - ad$.

Переход от одного выражения к другому, равному ему тождественно, называют **тождественным преобразованием** выражения.

С помощью тождественных преобразований часто удается *упростить* исходное выражение, т. е. заменить его тождественно равным выражением, более удобным для решения поставленной задачи.

Упражнения

202. Вычислите устно, применяя свойства арифметических действий:

- 1) $1,48 \cdot 32,6 + 1,48 \cdot 67,4$;
- 2) $13,7 \cdot 6,12 + 3,88 \cdot 13,7$;
- 3) $23,4 \cdot 72,7 - 62,7 \cdot 23,4$;
- 4) $169 \cdot 0,58 - 0,57 \cdot 169$;
- 5) $\bigcirc 1,4 \cdot 47 + 14 \cdot 5,3$;
- 6) $\bigcirc 0,77 \cdot 39 + 0,61 \cdot 77$;
- 7) $\bigcirc 12 \cdot 0,37 - 32 \cdot 0,12$;
- 8) $\bigcirc 246 \cdot 0,37 + 130 \cdot 0,246$.

203. Как вы считаете, является ли тождеством равенство:

- | | |
|------------------------------------|---------------------------------|
| 1) $5(a + b) = 5a + 5b$; | 6) $(-2y) \cdot (-3c) = -6cy$; |
| 2) $3c - 3d = 3(c - d)$; | 7) $2a + a = 3a$; |
| 3) $(5 - 4y) \cdot 6 = 30 - 24y$; | 8) $4b - 3b = b$; |
| 4) $(4x + 8) : 4 = x + 2$; | 9) $c - c = 0$; |
| 5) $2x \cdot 7y = 2y \cdot 7x$; | 10) $-(a + b) = -a - b$? |

204. Докажите, что данное равенство не является тождеством:

- | | |
|-------------------------------------|---|
| 1) $a^2 + a = a^3$; | 6) $\bigcirc ab = ab$; |
| 2) $b^3 - b = b^2$; | 7) $\bigcirc \frac{ a }{b} = \frac{a}{b}$; |
| 3) $5a^2 = (5a)^2$; | 8) $\bullet \frac{5 a }{-a} = -5$; |
| 4) $\bigcirc (a + 1)^2 = a^2 + 1$; | 9) $\bullet \frac{2a}{ a } = 2$; |
| 5) $\bigcirc (b - 2)^2 = b^2 - 4$; | 10) $\bullet \frac{ a - 3 }{a - 3} = 1$. |

205. Замените данное выражение тождественно равным выражением, не содержащим скобки:

1) $12(5a + 7b)$; 5) $10(3a - 70b - 0,9c + 0,07)$;

2) $0,45(8a - c)$; 6) $-0,45\left(6\frac{2}{3}cn + 20bk\right)$;

3) $0,08(30x + 0,2y)$; 7) $4x\left(1,25x - \frac{7}{8}ay - \frac{5}{6}\right)$;

4) $-\frac{3}{7}\left(0,7ab - 1\frac{1}{6}cd\right)$; 8) $2,4y\left(\frac{1}{5}k + 1,5c - 0,05y\right)$.

206. Приведите подобные члены в выражении:

1) $2c + 4,7c - 3,4c - 1,3$;

2) $7p - 5,5p - 8,7p + 9,1$;

3) $2,6x - 3,8y - 1,2y + 1,4x + 5y$;

4) $3,2k + 4,3p - 1,8k - 2,4k + 1,7p$;

5) $\frac{2}{3}x - \frac{2}{5}y - \frac{5}{12}x - \frac{7}{20}y - \frac{1}{6}x$;

6) $\frac{7}{15}a - \frac{11}{18}b - \frac{1}{20}a - \frac{28}{45}b + \frac{1}{15}b - \frac{5}{12}a$.

207. Замените данное выражение тождественно равным, не содержащим скобки:

1) $(x + 2) + (x - 3)$;

4) $4(y - 5) + 3(y + 7)$;

2) $(y + 5) - (y - 2)$;

5) $7(n - 9) - 5(n + 1)$;

3) $5(x + 4) - 3(x - 2)$;

6) $11(a - 9) + 8(a - 13)$.

208. Раскройте скобки и упростите выражение:

1) $5(a + 2b - 3) - 4(b - a - 4)$;

2) $7(2x - y - 4) - 3(5x - 3y - 9)$;

3) $11(k - 3n + 8) - 3(4k - 11n + 27)$;

4) $9(2p - 4q - 7) + 5(7q - 4p + 13)$;

5) $3(4 - x) - (2(x + 1) - 5(x - 7))$;

6) $7(2y - x) - ((5y - 3x) - 4(x + y))$.

209. Докажите, что при всех значениях переменной выражение принимает одно и то же значение:

1) $2(3n - 13) - 3(2n - 9)$;

2) $4(3c + 7) + 6(7 - 2c)$;

3) $2(x - 1) + 3(x + 5) - 5(x + 2)$;

4) $7(1 - y) - 6(1 - 2y) + 5(11 - y)$.

210. Докажите, что равенство является тождеством:

- 1) $a(b + c) + b(c - a) - c(a + b) = 0$;
- 2) $x(1 - y - z) - y(1 - z - x) + z(1 + x - y) = x - y + z$;
- 3) $ab(c + 1) + bc(a + 1) - ac(2b - 1) = ab + bc + ac$;
- 4) $xy(1 - z) - yz(1 + x) - xz(1 - 2y) = xy - yz - xz$.

211. 1) Запишите формулу для вычисления площади фигуры, изображенной на рисунке 41, разбивая фигуру на прямоугольники: а) горизонтальными; б) вертикальными. Докажите с помощью преобразований, что полученные выражения тождественно равны.

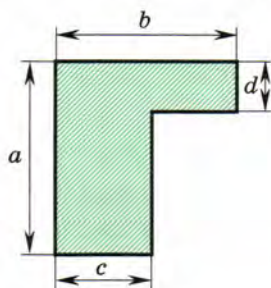


Рис. 41

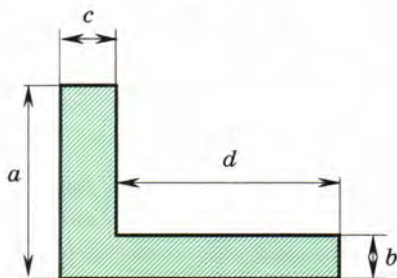


Рис. 42

2) Решите аналогичную задачу для фигуры, изображенной на рисунке 42.

212. Вставьте недостающие члены тождества:

- 1) $a \cdot 0 = \dots$;
- 3) $c + \dots = c$;
- 5) $a \cdot \dots = 1$;
- 2) $1 \cdot \dots = b$;
- 4) $a + \dots = 0$;
- 6) $\frac{a}{b} \cdot \dots = 1$.



Контрольные вопросы и задания

1. Какие выражения называют тождественно равными?
2. Какие из следующих равенств являются тождествами:
 - 1) $-x - 3x = 2x$;
 - 2) $-x - 3x = -4x$;
 - 3) $-(2x - 3y) = -2x + 3y$;
 - 4) $-(2x - 3y) = -2x - 3y$;
 - 5) $|x| = |-x|$;
 - 6) $|x| = x$?
3. Докажите, что данное равенство является тождеством: $a(2b - c) + b(2c - a) + c(2a - b) = ab + ac + bc$.

15. Определение степени с натуральным показателем

Мы уже неоднократно встречались со степенями чисел. С их помощью мы обозначали произведения одинаковых множителей. Так, например, при разложении числа 16 на простые множители получается: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$. Это выражение, состоящее из четырех одинаковых множителей, можно записать короче: 2^4 (читается: два в четвертой степени)¹.

Произведение n множителей, каждый из которых равен a , обозначают a^n (читается: a в n -ой степени).

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

Здесь n может быть любым натуральным числом, кроме единицы, так как не бывает произведения с одним множителем. По этой причине выражение a^1 приходится определять отдельно: $a^1 = a$.

Выражение a^n называют **степенью**,
 a — **основанием** степени, n — **показателем** степени.

При возведении в степень с натуральным показателем положительного числа получается положительное число (произведение положительных множителей положительно).

При возведении в степень с натуральным показателем отрицательного числа знак результата зависит от четности или нечетности показателя степени.

Если показатель степени отрицательного числа четный, значение степени положительно (произведение четного числа отрицательных множителей).

Если же показатель степени отрицательного числа нечетный, то значение степени отрицательно (произведение нечетного числа отрицательных множителей).

¹ Обозначение степени неизвестного использовал Диофант в книге «Арифметика» в III в. Обозначения показателей степени, которыми мы сегодня пользуемся, ввел Р. Декарт в XVII в.

■ На калькуляторе вычисление степени сводится к многократному умножению числа само на себя. Приведем для примера программу вычисления 2^7 :

$$2 * = = = = = ,$$

В результате калькулятор покажет число 128, значит, $2^7 = 128$. ■

Упражнения

213. Представьте произведение в виде степени:

- 1) $aaaa$;
- 2) $ccccccc$;
- 3) $(-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2)$;
- 4) $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4}$;
- 5) $(-p) \cdot (-p) \cdot (-p) \cdot (-p) \cdot (-p) \cdot (-p)$;
- 6) $(2a) \cdot (2a) \cdot (2a) \cdot (2a) \cdot (2a)$.

214. 1) Запишите степень, основание которой равно:

- а) 10, а показатель степени равен 6;
- б) 6, а показатель степени равен 10;
- в) c , а показатель степени 5;
- г) a , а показатель равен m .

2) Представьте эту степень в виде произведения.

215. Запишите в виде степени:

- 1) квадрат числа $-3,7$; 2) куб числа $\frac{4}{5}$; 3) четвертую степень произведения a на c .

216. Представьте степень в виде произведения:

- | | | | |
|---------------|-----------------------------------|-------------------------------------|------------------|
| 1) x^6 ; | 4) $0,4^3$; | 7) $(ax)^6$; | 10) $(a+2)^3$; |
| 2) y^5 ; | 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^4$; | 8) $\left(-\frac{7}{9}b\right)^2$; | 11) $(c-5)^4$; |
| 3) $(-k)^7$; | 6) $(-3t)^5$; | 9) $(-by)^7$; | 12) $(2t+1)^2$. |

217. Найдите значение степени:

- | | | |
|----------------|-----------------------------------|----------------|
| 1) 2^6 ; | 5) $\left(\frac{3}{2}\right)^4$; | 9) $(-3)^5$; |
| 2) 3^5 ; | 6) $0,4^3$; | 10) $(-2)^8$; |
| 3) $(-5)^3$; | 7) $0,24^2$; | 11) $-0,3^4$; |
| 4) $(-10)^4$; | 8) $(-0,3)^4$; | 12) $-0,2^5$. |

218. Найдите значение выражения с переменной:

- 1) $3^n + 2^n$, если: а) $n = 2$; б) $n = 1$;
2) $a^4 - a^2$, если: а) $a = 5$; б) $a = -\frac{3}{4}$.

219. Сравните значения выражений:

- 1) 3^4 и 4^3 ; 5) $0,3^2$ и $0,3^3$;
2) 2^{10} и 10^2 ; 6) $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ и $\left(\frac{3}{4}\right)^3$;
3) $0,2$ и $0,2^3$; 7) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^4$;
4) $1,2$ и $1,2^2$; 8) $(-0,4)^2$ и $0,4^2$.

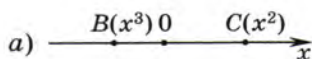
220. Расположите в порядке возрастания значения выражений: 7^n ; $(-9)^n$; 3^n ; $0,5^n$; $(-2,7)^n$; 0^n , если известно, что n :

- 1) четное; 2) нечетное число.

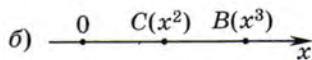
221. Определите, если возможно, каким числом — четным или нечетным — является показатель степени n , если:

- 1) $(-5)^n > (-3)^n$; 3) $(-5)^n < (-3)^n$; 5) $(-5)^n < 3^n$;
2) $(-5)^n > 3^n$; 4) $5^n > 3^n$; 6) $5^n > (-3)^n$.

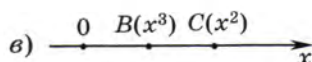
222. Укажите на координатной прямой (рис. 43), где примерно расположена точка $A(x)$.



223. Расположите в порядке возрастания числа:



- 1) $(-0,5)^7$; $(-0,5)^4$; $(-0,5)^6$;
2) $(-0,7)^2$; $(-0,7)^3$; $(-0,7)^4$.



224. 1) Представьте в виде степени с основанием 10 число:

- а) 10 000 000; г) 100 000 000;
б) 1 000 000; д) 100 000 000 000;
в) 1 000 000 000; е) 10 000 000 000.
2) Запишите число 1 000 ... 000, в котором n нулей, в виде степени с основанием 10.

Рис. 43

225. Используя степень числа 10, запишите, что:

- 1) в одном метре 1000 мм;
2) в одном килограмме 1 000 000 мг;
3) в одном километре 100 000 см;
4) в одной тонне 1 000 000 г.

226. Запишите в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$:

- 1) площадь поверхности Земли, равную 510 000 000 км²;
- 2) расстояние от Земли до Солнца, равное 150 000 000 км.

227. Разложите число на простые множители и представьте результат в виде произведения степеней:

- 1) 54; 2) 72; 3) 540; 4) 504.

228. Вычислите:

- 1) $\left(\frac{3}{7}\right)^2 \cdot 0,49 + (0,1)^3 \cdot 210$;
- 2) $2^5 \cdot 3^3 : 180$;
- 3) $240 : \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 50 : (-0,5)^2$;
- 4) $(-0,3)^3 \cdot 0,5^2 + (-0,5)^2 \cdot 0,4^3$.

229. Вычислите:

- 1) $0,04 - 45^2$; 3) $0,25 \cdot (-8)^3$; 5) $(4,5^2 - 23,5)^3$;
- 2) $-\frac{1}{9} \cdot 6,3^2$; 4) $\frac{1}{320} \cdot (-16)^3$; 6) $(9,5^3 - 784)^2$.

230. Представьте, если возможно, в виде степени с показателем 2 или 3:

- 1) 8; 4) 128; 7) -64;
- 2) 64; 5) 125; 8) $5\frac{4}{9}$;
- 3) 81; 6) -27; 9) $1\frac{11}{25}$.

231. Определите, положительным или отрицательным является число:

- 1) $(-7)^{23}$; 3) $(-2)^{57} \cdot (-3)^{21}$;
- 2) $(-3)^{44}$; 4) $(-6)^9 \cdot (-8)^{10}$.

232. Если утверждение неверно, приведите опровергающий его пример:

- 1) если квадраты двух чисел равны, то равны и сами числа;
- 2) если кубы двух чисел равны, то равны и сами числа;
- 3) если к отрицательному числу прибавить его квадрат, то получится положительное число;
- 4) если из отрицательного числа вычесть его квадрат, то получится отрицательное число.

233. Верно ли утверждение:

- 1) квадрат натурального числа может оканчиваться любой цифрой;
- 2) куб натурального числа может оканчиваться любой цифрой;
- 3) четвертая степень натурального числа может оканчиваться только одной из цифр: 0; 1; 5; 6;
- 4)* пятая степень натурального числа оканчивается той же цифрой, что и само число?

234. 1) Запишите значение выражения:

- а) $2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 6$;
- б) $7 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^3 + 1$;
- в) $10^4 + 10^2 + 10 + 1$;
- г) $9 \cdot 10^4$.

2) Запишите в виде суммы разрядных слагаемых число:

- а) 3057; б) 14 003; в) 30 002; г) 203 004.

235. Расположите в порядке возрастания числа, записанные с помощью трех двоек: 222, 22^2 , 2^{22} , 2^{2^2} .

236. Проверьте равенство:

- 1) $1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$;
- 2) $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$;
- 3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$.

237. Многие известные математики искали формулу, по которой можно было бы находить простые числа. Французский математик XVII в. П. Ферма предполагал, что числа вида $a_n = 2^{2^n} + 1$ — простые. Лишь в 1732 г. это утверждение было опровергнуто Л. Эйлером, доказавшим, что число $a_5 = 2^{2^5} + 1$ не простое, так как делится на 641. Проверьте это утверждение с помощью калькулятора.

238. Существует легенда о том, что где-то в глубине джунглей в буддийском храме находится пирамида из 64 золотых дисков, нанизанных на вертикальный стержень. День и ночь жрецы храма переносят золотые диски с одного стержня на два других, строго соблюдая два правила:



- ① переносить только по одному диску;
- ② не класть больший диск на меньший.

Предание гласит, что, как только жрецы перенесут всю пирамиду с исходного стержня на один из двух других, грянет гром, храм рассыплется в пыль и, вообще, наступит конец света. Математики подсчитали, что число p перемещений, которые нужно сделать для переноски пирамиды из n дисков, вычисляется по формуле $p = 2^n - 1$.

1) Проверьте эту формулу для $n = 2$ и $n = 3$.

2)* Не вычисляя значения выражения $2^{64} - 1$, докажите, что оно кратно 5.

3) ■ Если предположить, что жрецы за 1 с переносят один диск, то сколько примерно лет им потребуется на всю работу (считайте, что в месяце 30 дней)?



Контрольные вопросы и задания

1. Что называется степенью с натуральным показателем?
2. Каким числом — положительным или отрицательным — является значение выражения: 1) $(-11)^{78}$; 2) $(-78)^{11}$?
3. Запишите с помощью степени числа 10, что радиус (r) Земли приближенно равен 6 400 000 м.

16. Свойства степени

После того как мы определили степень с натуральным показателем, к числу основных тождеств прибавилось еще одно $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$, позволяющее заменять произведения одинаковых множителей степенями. Пользуясь этим тождеством, можно вывести важные *свойства степеней*.

1. Произведение степеней с одинаковыми основаниями можно тождественно преобразовать в степень с тем же основанием. Например:

$$\begin{aligned} a^5 \cdot a^3 &= (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = \\ &= a^{5+3} = a^8. \end{aligned}$$

Вообще, если m и n — любые натуральные числа, то

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Это тождество называют *основным свойством степени*. Его можно распространить на любое число множителей. Для трех множителей, например, имеем:

$$a^m \cdot a^n \cdot a^k = (a^m \cdot a^n) \cdot a^k = a^{m+n} \cdot a^k = a^{m+n+k}.$$

Выполняя преобразования, пользуются правилом.

При умножении степеней с одинаковыми основаниями показатели складывают.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

2. Рассмотрим выражение $(a^3)^5$, являющееся пятой степенью третьей степени a . Можно ли это выражение преобразовать в степень с основанием a ?

По определению степени выражение $(a^3)^5$ — это произведение пяти множителей, каждый из которых равен a^3 :

$$(a^3)^5 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3+3} = a^{3 \cdot 5} = a^{15}.$$

Для любых натуральных чисел m и n $(a^m)^n = a^{mn}$.

При возведении степени в степень показатели перемножают.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

3. Выражение $(ab)^5$ — пятая степень произведения множителей a и b . Используя определение степеней, получим: $(ab)^5 = (ab)(ab)(ab)(ab)(ab) = (aaaaa)(bbbbbb) = a^5b^5$.

При любом натуральном n

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

Это свойство можно распространить на любое число множителей. Так, для трех множителей имеем

$$(abc)^n = ((ab)c)^n = (ab)^n c^n = a^n b^n c^n.$$

Степень произведения равна произведению степеней множителей.

$$(ab)^n = a^n b^n$$

Упражнения

239. Представьте произведение степеней в виде степени:

- | | | | |
|----------------------|----------------------|--------------------|-------------------------------|
| 1) $x^3 x^8$; | 4) $k^{23} k^{17}$; | 7) $c^4 c^2 c$; | 10) $2^3 \cdot 2^7 \cdot 2$; |
| 2) $y^{10} y^5$; | 5) $a^7 a^4 a^9$; | 8) $pp^8 p^{11}$; | 11) $3^4 \cdot 3 \cdot 3^3$; |
| 3) $b^{21} b^{39}$; | 6) $n^6 n^3 n^2$; | 9) $k^5 k^7 k$; | 12) $7^9 \cdot 7^8 \cdot 7$. |

240. Представьте степень в виде произведения двух степеней с тем же основанием:

- 1) x^{10} ; 3) 6^7 ; 5) 5^{11} ;
2) y^3 ; 4) 2^{12} ; 6) 11^6 .

241. Представьте выражение в виде степени и найдите его значение:

- 1) $2^5 \cdot 2^3$; 2) $3^4 \cdot 3^3$; 3) $3^2 \cdot 3^7$; 4) $2^5 \cdot 2^5$.

242. $\odot$ Замените знак $*$ степенью с основанием c так, чтобы получилось тождество:

- 1) $c^2 \cdot * = c^6$; 3) $cc^2 \cdot * = c^{13}$;
2) $* \cdot c^7 = c^{21}$; 4) $* \cdot c^{11} \cdot c^5 = c^{30}$.

243. $\odot$ Представьте в виде степени числа 2 или числа 3 выражение:

- 1) $9 \cdot 3^3$; 3) $81 \cdot 3^5$; 5) $243 \cdot 243$;
2) $2^3 \cdot 16$; 4) $64 \cdot 2^4$; 6) $512 \cdot 128$.

244. $\bullet$ Вычислите и запишите в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ (множитель a округлите до десятых):

- 1) $3,7 \cdot 10^2 \cdot 1,2 \cdot 10^3$; 3) $6,2 \cdot 10^7 \cdot 2,7 \cdot 10^2$;
2) $3,5 \cdot 10^3 \cdot 2,4 \cdot 10^4$; 4) $7,5 \cdot 10^4 \cdot 8,3 \cdot 10^7$.

245. Представьте выражение в виде степени переменной x :

- 1) $(x^3)^2$; 5) $(x^5)^4$; 9) $\odot x^5(x^2)^6$;
2) $(x^2)^5$; 6) $(x^5)^8$; 10) $\odot x^8(x^6)^2$;
3) $(x^4)^3$; 7) $\odot x^3(x^2)^4$; 11) $\odot (x^4)^5(x^2)^3$;
4) $(x^8)^2$; 8) $\odot (x^3)^2x^4$; 12) $\odot (x^9)^4(x^8)^3$.

246. Укажите значение x , при котором верно равенство:

- 1) $(3^5)^x = 3^{10}$; 3) $(5^x)^4 = 5^{24}$;
2) $3^5 \cdot 3^x = 3^{10}$; 4) $5^x \cdot 5^4 = 5^{24}$.

247. $\odot$ Представьте 2^{20} в виде степени с основанием:

- 1) 2^2 ; 2) 2^4 ; 3) 2^5 ; 4) 2^{10} .

248. Известно, что $3^8 = 6561$. Найдите: 1) 3^6 ; 2) 3^{10} ; 3) 3^{16} .

249. $\odot$ Представьте несколькими способами в виде степени с другим основанием:

- 1) a^{12} ; 4) 5^{18} ;
2) b^{60} ; 5) 8^8 ;
3) 3^{15} ; 6) 81^{10} .

250. Сравните значения выражений:

1) 3^8 и 27^3 ;

3) 4^{10} и 8^7 ;

2) 8^9 и 2^{28} ;

4) 25^3 и 125^2 .

251. Вставьте пропущенные выражения так, чтобы получилось тождество:

1) $(\dots)^2 \cdot (\dots)^3 = y^7$;

4) $(\dots)^5 \cdot (\dots)^4 = a^{23}$;

2) $(\dots)^3 \cdot (\dots)^4 = b^{10}$;

5) $(\dots)^2 \cdot (\dots)^3 = -4a^7$;

3) $(\dots)^2 \cdot (\dots)^3 = c^{13}$;

6) $(\dots)^2 \cdot (\dots)^3 = -27b^{11}$.

252. Представьте степень произведения в виде произведения степеней:

1) $(xy)^6$;

7) $\left(\frac{1}{2}abn\right)^5$;

13) $\bigcirc (-2a^5c^4)^3$;

2) $(2b)^4$;

8) $\left(-\frac{1}{3}nkkx\right)^6$;

14) $\bigcirc (-3n^2y^5)^4$;

3) $\left(\frac{2}{3}a\right)^5$;

9) $\bigcirc (b^2c)^5$;

15) $\bigcirc \left(-\frac{3}{4}ny^6\right)^4$;

4) $\left(\frac{3}{2}k\right)^7$;

10) $\bigcirc (a^4y^3)^2$;

16) $\bigcirc \left(-\frac{4}{3}k^2x^7\right)^3$;

5) $(-0,2ab)^5$;

11) $\bigcirc (0,1p^3)^4$;

17) $\bigcirc (-1,2a^3b^5)^9$;

6) $(-3abx)^4$;

12) $\bigcirc (0,2k^5)^3$;

18) $\bigcirc (-5,6c^7d^8)^8$.

253. Запишите в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$:

1) $(3 \cdot 10^4)^3$;

3) $(4,5 \cdot 10^6)^2$;

2) $(7 \cdot 10^5)^3$;

4) $(2 \cdot 10^4)^7$.

254. Представьте выражение в виде степени произведения:

1) b^4x^4 ;

5) $-n^7y^7$;

9) $\bigcirc 27p^3$;

2) a^3y^3 ;

6) $-k^9x^9$;

10) $\bigcirc 8b^3$;

3) $a^6b^6c^6$;

7) $\bigcirc c^4y^6$;

11) $\bigcirc 16a^8b^4$;

4) $n^5x^5y^5$;

8) $\bigcirc b^{10}x^5$;

12) $\bigcirc 9a^2b^4c^6$.

255. Найдите значение выражения:

1) $2^4 \cdot (-5)^4$;

3) $4^3 \cdot 2,5^3$;

2) $(-0,25)^7 \cdot (-4)^7$;

4) $0,2^5 \cdot 50^5$.

256. Изменится ли значение выражения:

1) 0^n ; 2) $(-1)^n$; 3) $(-1)^{2n}$, если число n увеличить на 1?

257. Упростите выражение:

1) $(b^{50})^4 \cdot b^{13}b^{37}$;

3) $(a^{18})^2 \cdot (a^{23})^3a^5$;

2) $c^{75} \cdot c^{89} \cdot c^{95}$;

4) $(d^n)^2 \cdot d^{2n+1}$.

258. Решите уравнение:

1) $x^5 = 32$;

4) $x : (7^2 \cdot 9)^3 = 49 \cdot 3^6$;

2) $x : \left(\frac{4}{9}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^4$;

5) $2x^2 \cdot x^3 - 6250 = 0$;

3) $(x^2)^3 : (-0,008) = (-5)^3$;

6) $2^4 \cdot 2^x = 2^{17}$.

259. Представьте в виде степени, показатель которой отличен от единицы, выражение:

1) $-a^6$;

2) $-b^{12}$;

3) $-64c^{18}$;

4) $0,0064k^{24}$.

260. Докажите, что:

1) $8^7 - 2^{18}$ делится на 14;

2) $5^{21} + 25 \cdot (5^3)^6$ кратно 30;

3) $11 \cdot 2^{n-1} + 5^{n-2} + 2^n + 5^n$ кратно 13;

4) $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ делится на 10.

261. 1) Укажите несколько делителей числа:

а) 2^7 ;

б) 3^{11} ;

в) $2^5 \cdot 3^5$;

г) 10^{10} .

2) * Сколько делителей имеет это число?

262. Верно ли равенство:

1) $96 \cdot 98 \cdot 189 = 81 \cdot 343 \cdot 2^6$;

3) $25^{28} \cdot 0,008^{19} = 0,25$;

2) $12^{18} = 27^6 \cdot 16^9$;

4) $4096 \cdot 25^6 = 10^{12}$?

263. 1) Верно ли равенство $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$?

2) Вычислите $\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$.

264. Среди делителей числа $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 16 \cdot 17$ найдите наибольший, который является: 1) кубом натурального числа; 2) квадратом натурального числа.

265. Докажите, что: 1) $100\,002^4 > 9997^5$; 2) $31^{11} < 17^{14}$.

266. Ни одно из чисел a , b , c не равно нулю. Известно, что числа $(-2)^8 a^3 b^3 c^{n-1}$ и $(-3)^9 a^2 b^5 c^{n+1}$ имеют одинаковые знаки. Определите знак числа a .

! Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте основное свойство степени.

2. 1) Как можно возвести в степень произведение чисел, степень числа?

2) Запишите результат вычислений в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$:

а) $(5 \cdot 10^4)^3$;

б) $(7 \cdot 10^5)^3 \cdot (2 \cdot 10^6)^2$.

3. Замените выражение $(p^2)^5 \cdot (p^4)^3$ степенью с основанием p , указывая, какие свойства степени вы применяете.
4. Вычислите $\frac{(2^5)^2 \cdot 3^8}{6^6}$.

§ 7. Действия со степенями

17. Одночлены

В произведении $2^2 \cdot a^3 b x^2 a x \cdot 7 b^4 x^9$ множителями являются числа, переменные и их степени. Такие выражения называются *одночленами*.

Одночлен $2^2 \cdot a^3 b x^2 a x \cdot 7 b^4 x^9$ можно тождественно преобразовать в одночлен, имеющий более простой вид:
 $2^2 \cdot a^3 b x^2 a x \cdot 7 b^4 x^9 = (2^2 \cdot 7)(a^3 a)(b b^4)(x^2 x x^9) = 28 a^4 b^5 x^{12}$.

Выполняя преобразование, мы

① записали впереди значение произведения числовых множителей — *коэффициент одночлена*;

② произведения степеней одинаковых переменных заменили их степенями.

В результате одночлен был приведен к виду, который называют *стандартным*.

У одночленов стандартного вида $c^3 x$ и $-p y^9$ числовой множитель не записан. Но поскольку $c^3 x = 1 \cdot c^3 x$, $-p y^9 = (-1) \cdot p y^9$, то коэффициентами этих одночленов считают соответственно числа 1 и -1.

Числа, переменные и их степени также относятся к *одночленам стандартного вида*.

Произведение двух или нескольких одночленов можно привести к одночлену стандартного вида. Например:

$$(-2,5 a^4 b^3 x^2) \cdot (-12 a b^2 y) = (-2,5 \cdot (-12)) \cdot (a^4 a) \cdot (b^3 b^2) x^2 y = 30 a^5 b^5 x^2 y.$$

В одночлен стандартного вида можно преобразовать и *степень одночлена*:

$$(5 b^4 c)^3 = 5^3 \cdot (b^4)^3 \cdot c^3 = 125 b^{12} c^3.$$

Здесь степенью одночлена мы назвали куб одночлена $5 b^4 c$. Однако слова «степень одночлена» употребляются и в ином

смысле, обозначая сумму показателей степеней, входящих в одночлен переменных. Так, одночлен $5b^4c$ имеет пятую степень — переменная b входит в него в четвертой, а переменная c — в первой степени ($c = c^1$).

Числа считают одночленами нулевой степени.

Одночлены стандартного вида: $2ab^2$, $-7ab^2$ и $6,4b^2a$ отличаются друг от друга только коэффициентами и знаками.

Одинаковые или отличающиеся только коэффициентами или знаками одночлены называют **подобными одночленами**.

Сумму нескольких подобных одночленов можно преобразовать в одночлен:

$$2ab^2 - 7ab^2 + 6,4ab^2 = (2 - 7 + 6,4)ab^2 = 1,4ab^2.$$

Напомним, что такое преобразование называют *приведением подобных членов*.

Упражнения

267. 1) Какие из данных выражений являются одночленами:

а) $2ab$; в) $\frac{3c}{d}$; д) $\frac{6a^7}{7}$; ж) $-cb$; и) z ;

б) $x + y$; г) a^2b^8 ; е) $m^2 - n$; з) -34 ; к) 0 ?

2) Укажите коэффициенты одночленов и их степени.

268. Используя число 2 и переменные a и b , запишите несколько одночленов.

269. Приведите к стандартному виду одночлен и определите, какая у него степень:

1) $6xxbxxbb \cdot 5xbx$; 5) $2\frac{2}{3}k^2n \cdot \left(-\frac{3}{16}\right)kn^6$;

2) $\frac{3}{8}aaab^4ac \cdot 1,6c^2$; 6) $-\frac{1}{2}c^4y^5 \cdot 0,9c^2xy$;

3) $-2,4p^5 \cdot (-2,5)np^2$; 7) $2\frac{5}{11}a^6bc^2 \cdot \frac{22}{27}ab^3$;

4) $1\frac{5}{7}axy^7 \cdot \frac{7}{12}x^4y$; 8) $\bigcirc -0,6x^9p^6 \cdot 11\frac{1}{9}x^7y^3p$.

270. Преобразуйте в одночлен стандартного вида:

- 1) $(-2ax^2y^3)^4$; 4) $(-4a^2b^5) \cdot (0,5ab^3)^3$;
2) $(-0,3b^5cx^3)^9$; 5) $\bigcirc \left(2\frac{1}{3}x^2y^3\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{7}x^5y^4\right)^4$;
3) $(-3b^4y)^2 \cdot 5by^8$; 6) $\bigcirc \left(-3\frac{1}{3}k^3p^4\right)^3 \cdot (-0,3k^2p)^3$.

271. $\bigcirc$ Представьте, если возможно, в виде квадрата или куба одночлена:

- 1) $16a^2b^4$; 3) $8c^6x^9$; 5) $64a^6b^6$;
2) $9x^6y^2$; 4) $-27a^{12}b^6$; 6) $-64a^6b^6$.

272. $\bigcirc$ Замените букву M одночленом так, чтобы получилось тождество:

- 1) $M \cdot 5a^3b = 20a^7b^4c^2$; 4) $(2ky^4)^3 \cdot M = 72k^5y^{15}$;
2) $-6c^4k^5 \cdot M = 3bc^9k^{10}$; 5) $\bullet M^2 \cdot 12x^6 = 108x^8$;
3) $M \cdot (2nx^8)^2 = 6n^2x^{20}y$; 6) $\bullet M^2 \cdot 5b^7y^4 = 80b^9y^8$.

273. $\bigcirc$ Представьте несколькими способами в виде произведения двух одночленов ненулевой степени с натуральными коэффициентами:

- 1) a^6 ; 3) $(2x)^6$; 5) $(a^3b)^2$;
2) $2b^4$; 4) $(6y)^3$; 6) $(6x^2y^3)^4$.

274. 1) Представьте в виде произведения квадрата и куба одночленов с целыми коэффициентами одночлен:

- а) $4a^5$; б) $8b^7$; в) $64x^{14}$; г) $72x^6y^9$.

2) $\bullet$ Выполните пункты в) и г) как можно большим числом способов.

275. Приведите подобные члены:

- 1) $2,3xy^2 - 3,1xy^2 - 1,2xy^2$;
2) $0,27bc^3 + 0,4bc^3 - 0,66bc^3$;
3) $\bigcirc 0,8n^3p - 1\frac{3}{14}n^3p + 9,2n^3p - 2\frac{10}{21}n^3p$;
4) $\bigcirc \frac{11}{15}bx^4 - \frac{2}{3}bx^4 + 1,2bx^4 + \frac{2}{15}bx^4$.

276. 1) Используя переменные a и c , составьте одночлены, у которых:

- а) коэффициенты равны, а буквенные части не равны;
б) буквенные части равны, а коэффициенты не равны.
2) В каком случае получились подобные одночлены?

277. Найдите значение одночлена:

1) $25n^4$ при $n = \frac{1}{5}$;

2) $-10cd$ при $c = -0,23$, $d = -0,2$;

3) $-\frac{4}{25}x^2y^3$ при $x = 5$, $y = \frac{1}{2}$;

4) $2300a^4b$ при $a = -0,1$, $b = -4,5$.

! Контрольные вопросы и задания

1. Объясните, как произведение любых одночленов преобразовать в одночлен стандартного вида.
2. Приведите к одночлену стандартного вида, укажите коэффициент и степень одночлена:
1) $-3abc^2 \cdot 5a^3b(-0,6c)$; 2) $-0,4a^4b^3 \cdot 0,25bc \cdot (-10ab^2c^5)$.
3. Чему равна степень куба одночлена пятой степени?
4. Преобразуйте в одночлен стандартного вида
 $\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^3 \cdot (-9xy^3)$.

18. Сокращение дробей

Выражение вида $\frac{a}{b}$, где a и b — числовые выражения

или выражения с переменными,
называется **алгебраической дробью**.

a называют **числителем**,
 b — **знаменателем** дроби.

Дробь $\frac{2ab^2}{6a}$ имеет смысл при всех значениях переменных, кроме $a = 0$. Эту дробь можно сократить, разделив ее числитель и знаменатель на их общий множитель $2a$:

$$\frac{2ab^2}{6a} = \frac{b^2}{3}.$$

Полученное равенство является тождеством, так как оно верно при всех допустимых значениях переменных ($a \neq 0$).

Это следует из *основного свойства дроби*: $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$.

Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на какое-нибудь отличное от нуля число, то значение дроби не изменится.

Рассмотрим примеры сокращения дробей, числитель и знаменатель которых — степени одного и того же основания.

✓ **Пример 1.** Сократить дробь $\frac{a^{11}}{a^7}$.

Решение. Показатель степени числителя больше показателя степени знаменателя. Используя основное свойство степени и основное свойство дроби, получим:

$$\frac{a^{11}}{a^7} = \frac{a^7 \cdot a^4}{a^7} = a^4.$$

Степень a^4 имеет то же основание, что и степени a^{11} и a^7 . Ее показатель равен разности показателей числителя и знаменателя исходной дроби ($4 = 11 - 7$).

Вообще, при любых натуральных m и n , если $m > n$ и $a \neq 0$, то $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Если же $m = n$, то в левой части равенства $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ получится 1, а в правой — выражение a^0 . Поэтому принято следующее определение степени с нулевым показателем и основанием, отличным от нуля.

$$a^0 = 1$$

Теперь стало понятно, почему числа считают одночленами нулевой степени, например $5 = 5x^0$.

Для степеней с неравным нулю основанием получаем следующее важное свойство.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ при } m \geq n$$

Часто, однако, больший показатель оказывается у степени, стоящей в знаменателе дроби.

✓ **Пример 2.** Сократить дробь $\frac{a^{15}}{a^{25}}$.

Решение. Показатель степени числителя меньше показателя степени знаменателя.

$$\frac{a^{15}}{a^{25}} = \frac{a^{15}}{a^{15} \cdot a^{10}} = \frac{1}{a^{10}}.$$

И в этом примере мы разделили числитель и знаменатель дроби на степень с наименьшим из показателей числителя и знаменателя.

Рассмотрим более сложный случай сокращения дробей.

 **Пример 3.** Упростить выражение $\frac{(2b^3c^2)^5}{24a^3b^9c^{10}}$.

Решение. Приведем числитель данной дроби к одночлену стандартного вида:

$$\frac{(2b^3c^2)^5}{24a^3b^9c^{10}} = \frac{32b^{15}c^{10}}{24a^3b^9c^{10}}.$$

Чтобы сократить полученную дробь, разделим ее числитель и знаменатель:

- 1) на 8 (8 — наибольший общий делитель чисел 32 и 24);
- 2) на b^9 (9 — наименьший из показателей степеней переменной b в числителе и в знаменателе);
- 3) на c^{10} (c^{10} — общий для числителя и знаменателя дроби множитель).

Таким образом, мы сокращаем дробь на $8b^9c^{10}$:

$$\frac{(2b^3c^2)^5}{24a^3b^9c^{10}} = \frac{4b^6}{3a^3}.$$

 **Примечание.** При использовании полученной дроби нужно будет исключать из рассмотрения равные нулю значения переменных b и c .

Упражнения

278. Сократите дробь:

- | | | | |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------|------------------------------------|
| 1) $\frac{5b}{15}$; | 4) $\frac{7p}{12px}$; | 7) $\frac{26ay}{39a^2}$; | 10) $\frac{48xy^2}{-84x^2y}$; |
| 2) $\frac{42c}{24y}$; | 5) $\frac{3ac}{15ab}$; | 8) $\frac{63y^2}{36cy}$; | 11) $\frac{14a^3b}{21a^2b^3}$; |
| 3) $\frac{25cx}{18ax}$; | 6) $\frac{54kp}{45kp}$; | 9) $\frac{-8x^2}{60xy}$; | 12) $\frac{26c^7d^9}{-39c^8d^9}$. |

279. Представьте в виде степени с основанием a :

- | | |
|----------------------------|--|
| 1) $a^n : a^2$; | 5) $\frac{a^n \cdot a^2}{a^3}$; |
| 2) $a^{m+1} : a^m$; | 6) $\frac{a^{2n} \cdot a^3}{a^n}$; |
| 3) $a^{k+1} : a^{k-1}$; | 7) $\frac{a^{3n+1} \cdot a^{2-n}}{a^{2n}}$; |
| 4) $a^{5p+1} : a^{2p-3}$; | 8) $\frac{(a^{3n})^2 \cdot a^{5-2n}}{(a^2)^n}$. |

280. Представьте выражение в виде частного степеней разными способами:

- | | | | |
|------------|------------|----------------|-----------------|
| 1) x^2 ; | 3) ab ; | 5) $p^n - 2$; | 7) c^{2m-1} ; |
| 2) 3^8 ; | 4) y^n ; | 6) z^{m-n} ; | 8) 1. |

281. При каком значении n верно равенство:

- | | |
|-------------------------------|----------------------------|
| 1) $2^n \cdot 2^7 = 2^{12}$; | 3) $5^n : 25^{11} = 5^7$; |
| 2) $3^{21} : 3^9 = 3^n$; | 4) $64 : 16 = 2^n$? |

282. Сократите дробь:

- | | | | |
|------------------------------|------------------------------|--|---|
| 1) $\frac{b^{15}}{b^9}$; | 4) $\frac{y^{12}}{y^{18}}$; | 7) $\frac{10a^6b^6}{8a^8b^6}$; | 10) $\frac{64a^{15}b^{27}}{48a^{27}b^{27}}$; |
| 2) $\frac{a^{20}}{a^{10}}$; | 5) $\frac{8a^6}{6a^8}$; | 8) $\frac{36x^{12}y^{36}}{96x^{36}y^{96}}$; | 11) $\frac{125a^{31}}{625a^{13}}$; |
| 3) $\frac{x^7}{x^{21}}$; | 6) $\frac{9a^9}{12a^{12}}$; | 9) $\frac{12n^7p^9}{16n^7p^8}$; | 12) $\frac{35d^{91}a^{73}}{49d^{88}a^{69}}$. |

283. Упростите выражение:

- | | | |
|---|--|--|
| 1) $\frac{5a^7}{2a^3a^{11}}$; | 4) $\frac{(-2a^3k^2)^5}{48a^{19}k^{10}}$; | 7) $\frac{(-2c^5d^6)^4}{(4c^3d^4)^3}$; |
| 2) $\frac{c^4c^{14}}{10c^9}$; | 5) $\frac{(a^2y^6)^3}{(-a^3y^4)^4}$; | 8) $\frac{(-9n^3p^4)^4}{(-3n^2p^6)^7}$; |
| 3) $\frac{(-3x^2y^5)^4}{54x^6y^{17}}$; | 6) $\frac{(-b^2y^8)^5}{(-b^3y^{13})^3}$; | 9) $\frac{(10k^9c)^4}{(-5k^7c)^5}$. |

284. Замените букву M одночленом так, чтобы получилось тождество:

- | | |
|--|---|
| 1) $\frac{M}{24a^5b^{13}} = \frac{5}{6b}$; | 3) $\frac{M^2}{20a^{13}b^{18}} = \frac{(2b)^2}{5a}$; |
| 2) $\frac{48x^{12}b^{16}}{M} = \frac{8x^2}{5}$; | 4) $\frac{56x^{15}y^{15}}{M^3} = \frac{7x^3}{(2y)^3}$. |

285. Найдите значение выражения:

- 1) $\frac{2^{10}}{2^8}$; 4) $\frac{3^9}{9^5}$; 7) $\frac{6^9}{2^8 \cdot 3^{10}}$; 10) $\frac{16^9 \cdot 5^{19}}{20^{20}}$;
 2) $\frac{3^{2005}}{3^{2003}}$; 5) $\frac{5^{10}}{25^5}$; 8) $\frac{5^7 \cdot 3^5}{15^6}$; 11) $\frac{21^9}{9^5 \cdot 7^6}$;
 3) $\frac{4^5}{2^9}$; 6) $\frac{8^7}{4^{10}}$; 9) $\frac{12^9}{3^8 \cdot 8^6}$; 12) $\frac{10^{15}}{25^7 \cdot 4^6}$.

286. Вычислите:

- 1) $\left(-\frac{2}{3}\right)^7 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^8$; 4) $\left(\frac{5}{4}\right)^{11} \cdot (0,8)^9$;
 2) $\left(-\frac{3}{5}\right)^{12} : \left(-\frac{3}{5}\right)^9$; 5) $\left(-\frac{7}{9}\right)^4 : \left(\frac{7}{9}\right)^3$;
 3) $\left(1\frac{1}{4}\right)^{11} : \left(1\frac{1}{4}\right)^9$; 6) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 : \frac{32}{27 \cdot 81}$.

287. Решите уравнение:

- 1) $\left(\frac{x}{3}\right)^3 = \frac{8}{27^2}$; 3) $\frac{(x^{14})^2 \cdot (x^6)^3}{(x^4)^{11}} = 16$;
 2) $\left(\frac{2x}{7^3}\right)^5 = \frac{2^5}{7^{15}}$; 4) $\frac{x^{52} \cdot x^{29}}{(x^3)^{14} x^9 (x^4)^7} = 81$.

288. Найдите значение выражения:

- 1) $\frac{(a^4)^6 b^{43}}{(a^2)^{13} (b^6)^7}$ при $a = -0,7$; $b = 0,5$;
 2) $\left(\frac{7c^8}{9d^7}\right)^6 \cdot \frac{3^{12} d^{43}}{7^5 (c^{23})^2}$ при $c = -\frac{1}{3}$; $d = -\frac{4}{7}$.



Контрольные вопросы и задания

- В чем заключается основное свойство дроби?
- Приведите пример деления степеней с одним и тем же основанием (отличным от нуля) для случая, когда показатель делимого больше показателя делителя.
- Сократите дробь $\frac{32x^7 y^9 z^5}{48x^6 y^9 z^8}$.

МНОГОЧЛЕНЫ

§ 8. Произведение одночлена и многочлена

19. Понятие многочлена

Среди различных выражений, которые рассматриваются в алгебре, важное место занимают суммы одночленов. Приведем примеры таких выражений:

$$\begin{aligned} &5a^4 - 2a^3 + 0,3a^2 - 4,6a + 8; \\ &xy^3 - 5x^2y + 9x^3 - 7y^2 + 6x + 5y - 2; \\ &8b^5 - 2b \cdot 7b^4 + 3b^2 - 8b + 0,25b \cdot (-12)b + 16. \end{aligned}$$

Сумму одночленов называют *многочленом*. Слагаемые в многочлене называют *членами многочлена*. Одночлены также относят к многочленам, считая одночлен многочленом, состоящим из одного члена. Так, например, членами многочлена $5a^4 - 2a^3 + 0,3a^2 - 4,6a + 8$ являются одночлены: $5a^4$, $-2a^3$, $0,3a^2$, $-4,6a$ и 8 .

Многочлен $8b^5 - 2b \cdot 7b^4 + 3b^2 - 8b + 0,25b \cdot (-12)b + 16$ можно упростить.

① Представим все слагаемые в виде одночленов стандартного вида:

$$\begin{aligned} &8b^5 - 2b \cdot 7b^4 + 3b^2 - 8b + 0,25b \cdot (-12)b + 16 = \\ &= 8b^5 - 14b^5 + 3b^2 - 8b - 3b^2 + 16. \end{aligned}$$

② Приведем в полученном многочлене подобные члены:

$$\underline{8b^5} - \underline{14b^5} + \underline{3b^2} - 8b - \underline{3b^2} + 16 = -6b^5 - 8b + 16.$$

Получился многочлен, все члены которого являются одночленами стандартного вида, причем среди них нет подобных. Такие многочлены называют *многочленами стандартного вида*.

За степень многочлена стандартного вида принимают наибольшую из степеней его членов. Так, двучлен $12a^2b - 7b$ имеет третью степень, а трехчлен $2b^2 - 7b + 6$ — вторую.

Обычно члены многочленов стандартного вида, содержащих одну переменную, располагают в порядке убывания показателей ее степени. Например:

$$5x - 18x^3 + 1 + x^5 = x^5 - 18x^3 + 5x + 1.$$

Сумму нескольких многочленов можно преобразовать в многочлен стандартного вида.

 **Пример 1.** Преобразовать в многочлен стандартного вида выражение

$$(3a^2 - 5a + 7) + (-2a^2 + 7a - 9) - (a^2 + 8a - 5).$$

Решение. Применяя правило раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «+» или знак «-», и приводя подобные члены, получаем:

$$\begin{aligned} & (3a^2 - 5a + 7) + (-2a^2 + 7a - 9) - (a^2 + 8a - 5) = \\ & = \underline{3a^2} - \underline{5a} + 7 - \underline{2a^2} + \underline{7a} - 9 - \underline{a^2} - \underline{8a} + 5 = -6a + 3. \end{aligned}$$

 **Пример 2.** Разность двух двузначных чисел, записанных одними и теми же цифрами, равна 36. Найти уменьшаемое, если сумма его цифр равна 10.

Решение. Пусть x — число десятков, а y — число единиц в записи уменьшаемого, тогда в записи вычитаемого y — число десятков, а x — число единиц. Получаем:

$$\begin{cases} (x \cdot 10 + y) - (y \cdot 10 + x) = 36, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены в левой части первого уравнения системы и получим: $\begin{cases} 9x - 9y = 36, \\ x + y = 10. \end{cases}$

Решив систему, найдем, что $x = 7$, а $y = 3$.

Ответ: 73.

Иногда члены многочлена нужно разбить на группы, заключая каждую группу в скобки. Поскольку заключение в

скобки — это преобразование, обратное раскрытию скобок, то легко сформулировать правила *раскрытия скобок*.

Если перед скобками ставится знак «+»,
то члены, заключаемые в скобки,
записываются с теми же знаками.

Если перед скобками ставится знак «-»,
то члены, заключаемые в скобки,
записываются с противоположными знаками.

Например: $x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = (x^3 - 5x^2) + (7x - 8)$; $x^3 - 5x^2 + 7x - 8 = (x^3 - 5x^2) - (8 - 7x)$.

Упражнения

289. Представьте многочлен в стандартном виде и расположите его члены в порядке убывания степеней переменной:

- 1) $7x^2 + 3x^4 - 5x - 8x^4 + 5x$;
- 2) $2a^3 + a^2 - 1 - 3a^2 + a^3 - a$;
- 3) $12b^2 - b^3 - 6b^2 + 3b - 5b^2 + 2b^3$;
- 4) $0,12y^2 - y^3 - 6 - 0,62y^2 - 19y^3 + 0,5y^2 - 4$;
- 5) $\bigcirc \frac{2}{3}c^3 - 5c^2 + \frac{1}{9}c - \frac{3}{4}c^3 - 4,5c^2 + \frac{1}{6}c$;
- 6) $\bigcirc 0,45a^4 + \frac{3}{4}a - 0,6a^2 + 0,3a^4 - \frac{7}{8}a^2$.

290. Раскройте скобки и приведите подобные слагаемые:

- 1) $2a - (b - 2a)$;
- 3) $b - (a - (2b - a))$;
- 2) $c - (2a + (c + a))$;
- 4) $b + (2c - (3b - (b - 3c)))$.

291. Найдите значение многочлена:

- 1) $x^2 - 0,3xy - y^2$ при $x = 5, y = -6$;
- 2) $0,8a^2 + 5ab - 15b^2$ при $a = -5, b = -2$;
- 3) $7x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 7x + 2$ при $x = 10$;
- 4) $10\,000n + 1000m + 100p + 10k + 9$ при $n = 7, m = 6, p = 5, k = 9$.

292. Используя степени числа 10, запишите:

- 1) двузначное число, в котором s десятков и d единиц;
- 2) трехзначное число, в котором p сотен, 4 десятка и n единиц;
- 3) четырехзначное число, в котором a тысяч, b сотен, c десятков и d единиц;
- 4) четырехзначное число, в котором n тысяч и m единиц.

293. Запишите многочлен стандартного вида с одной переменной x , коэффициенты которого (коэффициенты его членов) — однозначные натуральные числа, если при $x = 10$ значение многочлена равно:

- 1) 47; 2) 541; 3) 8023; 4) 9 500 501.

294. Выясните, сколько корней имеет уравнение:

- 1) $3(1 - 2x) - 2(3x - 4) = 3(5 - 4x)$;
 2) $5(2x - 3) - 7(x - 2) + 7 = 3(3x - 5) + x$;
 3) $2(7 - x) - 3(4x - 5) - 8 = 7(3 - 2x)$.

295. Решите уравнение:

- 1) $\frac{2}{9} \left(0,9 - 1\frac{2}{7}x \right) + x = 10$; 3) $\frac{2x - 3}{4} - 1 = x + \frac{x + 5}{3}$;
 2) $8 \left(5 - 1\frac{1}{4}b \right) = 3b + 14$; 4) $\frac{3x + 1}{2} + 2 = \frac{x + 1}{7} - x$.

296. 1) В записи двузначного числа единиц в два раза больше, чем десятков. Если к этому числу прибавить 36, то получится число, записанное теми же цифрами. Найдите это число.

2) В записи двузначного числа единиц на 5 больше, чем десятков. Если к этому числу прибавить другое двузначное число, записанное теми же цифрами, то получится 121. Найдите это число.

297. Преобразуйте выражение в многочлен стандартного вида и определите его степень:

- 1) $(1 - 3a) + (a^2 + 2a)$;
 2) $(2x^2 - 5x) + (-x + 14)$;
 3) $(y^2 - 5y) + (-2y^2 + 5y + 1)$;
 4) $(p^2 + 2p + 7) - (p^2 + 3p + 18)$;
 5) $(9k^3 + 13k^2) - (8 - 7k + 12k^2)$;
 6) $(a^2 + 15a + 14) - (a^2 + 15a - 14)$.

298. Найдите значение выражения:

- 1) $(5,7a^2b - 3,1ab + 8b^3) - (6,9ab - 2,3a^2b + 8b^3)$
 при $a = 2, b = 5$;
 2) $(5x^2 - 3xy + 7y^2) + (5xy - 12x^2)$ при $x = -2, y = 4$.

299. Докажите, что значение выражения не зависит от значения входящей в него переменной:

- 1) $3,7 - 11b^2 - (2 - 4b^2) + (5,3 + 7b^2)$;
 2) $(11 - b^2) - (3b - 2b^2) + (10 + 3b - b^2)$.

300. Какой многочлен нужно подставить вместо M , чтобы получилось тождество:

- 1) $M + (13a^2 - 8ab) = 7a^2 + 9ab - b^2$;
- 2) $M - (4ab - 18b^2) = a^2 - 7ab + 12b^2$?

301. Впишите пропущенные одночлены так, чтобы получилось тождество:

- 1) $(5x^2 + \dots - 7) + (\dots - 4x + \dots) = x^2 + 2x + 1$;
- 2) $(\dots - 6c + 13) - (9c^2 - \dots + \dots) = 2c^2 + 3c - 4$.

302. Какие из следующих высказываний верны:

- 1) сумма трех последовательных натуральных чисел кратна 3;
- 2) сумма четырех последовательных натуральных чисел кратна 4;
- 3) сумма четырех последовательных натуральных чисел — четное число;
- 4) сумма двух последовательных натуральных четных чисел кратна 4;
- 5) сумма двух неравных двузначных чисел, записанных одними и теми же цифрами, кратна 11;
- 6) разность двух неравных двузначных чисел, записанных одними и теми же цифрами, кратна 9?

303. Представьте многочлен в виде суммы двух многочленов так, чтобы один из многочленов не содержал переменной y :

- 1) $x^3 - 9x^2y + 2y^3 - 8xy^2 + 6x - 19$;
- 2) $x^4 - x^2y^2 + 8x^3y - 3y^4 - 4xy - 6$.

304. Представьте многочлен в виде разности двух многочленов так, чтобы один из многочленов не содержал переменной b :

- 1) $7a^3 - 9a^2b + 2b^3 - 8ab^2 - 9a + 2$;
- 2) $ab^2 + a^2b^2 - 19a^3 + 5b^3 + b^2 - 7a - 1$.

305. Представьте многочлен в виде разности одночлена и трехчлена:

- 1) $x^3 + 2x^2 - 3x - 5$;
- 2) $-2y^4 - 3y^3 + 5y^2 - 15y$;
- 3) $0,3p^2 - p^4 - 2p + 1$;
- 4) $7a^4 + 2a^3 + 0,5a^2 - 4a$.

306. Какой может оказаться степень многочлена, полученного в результате сложения:

- 1) многочлена третьей и четвертой степеней;
- 2) двух многочленов четвертой степени?

307. Представьте многочлен $3a^3 - 5a^2 + 7a - 8$ в виде:

1) суммы двух многочленов, один из которых

$$a^3 - 7a^2 + 5a - 9;$$

2) разности двух многочленов, один из которых

$$a^3 + a^2 - 6.$$

308. Представьте трехчлен в виде суммы двух двучленов:

1) $x^2 + 6x + 1$;

3) $y^2 - 3y - 7$;

2) $a^2 - a - 2$;

4) $2b^2 + 7b - 1$.

309. Представьте трехчлен в виде разности двух двучленов:

1) $x^2 + 6x + 7$;

3) $a^2 - a + 3$;

2) $2y^2 - y - 1$;

4) $b^2 + b - 10$.

310. Известно, что $x = 3a^2 + 5ab - 2b^2$; $y = 2a^2 - 7ab - b^2$, $z = 5a^2 - 9ab + 3b^2$. Подставьте эти многочлены в выражение:

1) $x + y + z$;

3) $x - (y + z)$;

2) $x + y - z$;

4) $x - (y - z)$.

Преобразуйте полученное выражение в многочлен стандартного вида.

311. Вставьте знаки действий между слагаемыми так, чтобы получилось тождество:

1) $2x \ 3y \ 7y \ 5x \ 4y \ x = 6x$;

2) $2ab^2 \ 3a^2b \ 5ab^2 \ 2a^2b \ 7ab^2 = a^2b$.

312. Расставьте скобки в левой части так, чтобы получилось верное равенство:

1) $3c - 2c - 2d + 2d = c + 4d$;

2) $3c - 2c - 2d + 2d = c - 4d$.

313. Составьте многочлен, в котором бы встречались:

1) число a и переменная x ;

2) коэффициенты: $0,85$; -2 и $-\frac{2}{3}$;

3) показатели степени: 5 , 2 , 1 ;

4) одновременно выполнялись условия 1)–3).

314. Даны одночлены: a^2 , $2a^2b$, $2a$, a^3b . С помощью знаков действий составьте из них:

1) выражение, тождественно равное нулю;

2) выражение, тождественно равное единице.

315. Сумма трех слагаемых равна $3c + 1$. К первому слагаемому прибавили $2c - 4$, а из второго вычли $c - 2$. Что надо вычесть из третьего слагаемого, чтобы сумма стала равной нулю?

316.* Найдите число p , если известно, что данное равенство является тождеством:

$$(ax^2 + bx + c) + (bx^2 + ax - 7) + px^2 + cx + 3 = x^2 - 2x - 5.$$

317. Найдите сумму значений многочлена $x^5 - 1,7x^3 + 2,5$ при $x = 19,1$ и $x = -19,1$.

Контрольные вопросы и задания

1. Какие выражения называют многочленами? Какие многочлены считают многочленами стандартного вида?
2. Запишите какой-нибудь многочлен стандартного вида с одной переменной x , коэффициентами которого являются натуральные числа 3, 5, 7, 1, 8. Найдите его значение при $x = 10$.
3. Преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение

$$3a^2b - 4ab^2 + (b \cdot 2ab \cdot 3 - aba) - (ba^2 - b^2a).$$

20. Преобразование произведения одночлена и многочлена

С помощью распределительного свойства умножения можно преобразовать в многочлен произведение одночлена и многочлена. Например:

$$9a^2b(7a^2 - 5ab - 4b^2) = 9a^2b \cdot 7a^2 + 9a^2b \cdot (-5ab) + 9a^2b \cdot (-4b^2) = 63a^4b - 45a^3b^2 - 36a^2b^3.$$

Произведение одночлена и многочлена тождественно равно сумме произведений этого одночлена и каждого из членов многочлена.

Этот результат обычно формулируют в виде правила.

Чтобы умножить одночлен на многочлен, надо умножить этот одночлен на каждый из членов многочлена.

Мы уже неоднократно использовали это правило для умножения на сумму.



Пример. Решить уравнение $\frac{3x+1}{8} - \frac{x+7}{12} = 1$.

Решение.

① Приведем это уравнение к более простому виду, умножив обе его части на 24 (наименьшее общее кратное чисел 8 и 12):

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{8} \cdot 24 - \frac{x+7}{12} \cdot 24 &= 1 \cdot 24; \\ (3x+1) \cdot 3 - (x+7) \cdot 2 &= 24.\end{aligned}$$

② Умножим 3 на многочлен $3x+1$ и 2 на многочлен $x+7$, приведем подобные и найдем корень уравнения:

$$9x + 3 - 2x - 14 = 24; \quad 7x - 11 = 24, \quad 7x = 35, \quad x = 5.$$

Ответ: 5.

Упражнения

318. Преобразуйте в многочлен произведение:

- 1) $12a(a^2 - 9a + 7)$;
- 2) $5c(3c^2 + 2ac - a^2)$;
- 3) $-3a^3(2a^2 - 0,5ab + b^2)$;
- 4) $(y^2 - 2,4y - 8) \cdot 1,5y$;
- 5) $4ac^2(-2a^2 + 0,45ac - 4c^2)$;
- 6) $-ab(3a^2 - 6ab + 12b^2)$;
- 7) $(-x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4) \cdot 0,25x^2$;
- 8) $(2y^3 - 3y^2 + 0,8y - 16) \cdot (-1,5y^4)$.

319. Представьте выражение в стандартном для многочлена виде:

- 1) $4a^2 - 3a(a - 5)$;
- 2) $5b^2 - 4b(0,75b + 1)$;
- 3) $5b^3 - \frac{1}{4}b \left(8b^2 - 1\frac{3}{5}b - 4 \right)$;
- 4) $12c^4 - 2,5c^2(6c^2 + 0,4c - 2)$;
- 5) $7b(4c - b) + 4c(c - 7b)$;
- 6) $8a(b - 0,5a) - 2b(0,5b + 3a)$;
- 7) $2a(5a - 2) - 5(2a^2 - a + 3)$;
- 8) $2n(n^2 - 5np + 3p^2) + 5p(2n^2 - 1,2np)$.

320. Найдите значение выражения:

1) $4y(y - 5x) - 5x(x - 4y)$ при $x = 0,6$, $y = 0,75$;

2) $b(b - a + 1) - a(a - b + 1)$ при $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$;

3) $x(x^2 - 5xy - y^2) - y(y^2 - xy - 5x^2)$ при $x = 0,27$, $y = -0,34$;

4) $b(b^2 + 5bc - 2c^2) + c(-5b^2 + 2bc + c^2)$ при $b = -0,45$, $c = -0,86$.

321. Упростите выражение:

1) $12 \cdot \frac{a-1}{4} + 15 \cdot \frac{a-a^2}{5}$;

2) $48 \cdot \frac{2b+5}{16} - 10 \cdot \frac{3b-b^2}{2}$;

3) $24 \cdot \frac{3y^2-5y+4}{12} - 48y \cdot \frac{y-2}{8}$;

4) $72p \cdot \frac{p+10}{24} - 60 \cdot \frac{p^2+15p-7}{30}$.

322. Решите уравнение:

1) $\frac{3x+1}{4} + x = 23$;

5) $\frac{5x-7}{12} = 5 + \frac{x-5}{8}$;

2) $\frac{7x-1}{5} - x = 3$;

6) $\frac{4p-11}{15} + \frac{13-7p}{20} = -2$;

3) $\frac{5y+1}{2} - \frac{13-y}{5} = 3$;

7) $\frac{2y+5}{6} - \frac{3y-11}{8} = 2,5$;

4) $\frac{y-1}{7} + \frac{3y+1}{5} = 6$;

8) $\frac{45-2k}{10} - \frac{25+k}{15} = 5,5$;

9) $\frac{3x+41}{2} - \frac{x-3}{5} - \frac{9-2x}{6} = 0$;

10) $\frac{2z-14}{3} - \frac{3z-1}{5} - \frac{z-2}{2} = 0$.

323. Решите систему уравнений:

1)
$$\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = -1, \\ \frac{x+1}{4} + \frac{y}{2} = 0; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x + y = \frac{2x+9}{10} - \frac{1}{4}, \\ x - y = \frac{2x+9}{20} - \frac{1}{4}; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{5} = 1, \\ \frac{x}{3} + \frac{2-y}{2} = 0; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} \frac{y}{2} - \frac{x+y}{5} = 0,1, \\ \frac{y}{5} - \frac{x-y}{2} = 0,1. \end{cases}$$

Составляя уравнение или систему уравнений, решите задачи 324—327.

- 324.** 1) Из города в село грузовая машина ехала 1 ч 15 мин. Возвращалась она со скоростью на 10 км/ч меньшей, поэтому на обратный путь ушло на 15 мин больше времени. Какое расстояние между городом и селом?
- 2) Из села на железнодорожную станцию велосипедист ехал со скоростью 12 км/ч. Возвращался он со скоростью 15 км/ч и затратил на обратный путь на полчаса меньше. Сколько километров от села до станции?
- 325.** 1) Катер проходит по течению реки за 5 ч такое же расстояние, как за 6 ч 15 мин против течения. Найдите скорость катера в стоячей воде, если скорость течения реки равна 2,4 км/ч.
- 2) Лодка может пройти по течению реки за 3 ч такое же расстояние, как за 3 ч 40 мин против течения. Найдите скорость течения реки, если скорость лодки в стоячей воде равна 5 км/ч.
- 326.** 1) Из пункта A в пункт B со скоростью 66 км/ч отправился товарный поезд, а спустя 20 мин через B в направлении A прошел скорый поезд со скоростью 90 км/ч. Через сколько времени после выхода из A товарный поезд встретится со скорым, если расстояние между станциями A и B равно 256 км?
- 2) Из пункта A в пункт B со скоростью 4 км/ч вышел пешеход. Через 45 мин навстречу ему из B со скоростью 5 км/ч вышел другой пешеход. В пункты A и B пешеходы прибыли одновременно. Найдите расстояние между пунктами A и B .
- 327.** 1) Из пункта M в пункт N со скоростью 60 км/ч отправился товарный поезд, а 10 мин спустя вслед за ним по соседнему пути прошел пассажирский поезд, скорость которого была 85 км/ч. Через сколько минут пассажирский поезд догонит товарный?
- 2) Из пункта A в пункт C со скоростью 15 км/ч выехал велосипедист, а через 16 мин вслед за ним выехал другой велосипедист со скоростью 18 км/ч. Оба велосипедиста прибыли в пункт C одновременно. Сколько километров между пунктами A и C ?

328. 1) Разгадайте арифметический фокус.

Задумайте число, увеличьте его на 2, умножьте результат на задуманное число, прибавьте число 10, вычтите квадрат задуманного числа и удвоенное задуманное число. У вас получилось 10.

2) Придумайте свой арифметический фокус.

329. Задумали натуральное число, умножили его на следующее за ним число и из произведения вычли задуманное число. Как по полученному результату найти задуманное число?



Контрольные вопросы и задания

1. Как умножить многочлен на одночлен?
2. Упростите выражение
 $0,4x(x^2 - 8x - 5) - (0,8x - 4) \cdot 0,5x^2$.
3. Решите уравнение, объясняя каждый этап решения:

$$\frac{x+1}{3} - \frac{x+10}{6} = 3.$$

21. Вынесение общего множителя за скобки

При решении уравнений, при вычислениях, сокращениях дробей и в ряде других задач бывает полезно представлять многочлен в виде произведения двух или нескольких многочленов (среди которых могут быть и одночлены). Такое тождественное преобразование называют *разложением многочлена на множители*. Один из наиболее часто встречающихся способов разложения на множители — *вынесение общего множителя за скобки*.



Пример 1. Вынести за скобки общий множитель в многочлене $10ax^2 - 5x^3$.

Решение. Члены этого двучлена имеют общий множитель $5x^2$. Обычно, если все коэффициенты многочлена — целые числа, то выносят за скобки множитель с коэффициентом, равным наибольшему общему делителю всех коэффициентов, взятому со знаком «плюс» или «минус», а переменные, входящие во все члены, выносят с наименьшими показателями степени, которые они имеют в данном многочлене.

$$10ax^2 - 5x^3 = 5x^2 \cdot 2a - 5x^2 \cdot x = 5x^2(2a - x).$$

 **Пример 2.** Разложить на множители многочлен $18a^4b^3 - 45a^2b^5 - 63ab^6$.

Решение.

① Находим наибольший общий делитель всех коэффициентов многочлена:

$$\text{НОД}(18; 45; 63) = 9.$$

② Устанавливаем, что переменная a содержится во всех членах, и наименьший из ее показателей степени равен 1. Устанавливаем, что переменная b содержится во всех членах, причем наименьший из ее показателей степени равен 3.

③ Выносим за скобки множитель $9ab^3$, общий для всех членов. В скобках записываем алгебраическую сумму частных членов многочлена и вынесенного множителя:

$$\begin{aligned} 18a^4b^3 - 45a^2b^5 - 63ab^6 &= 9ab^3 \left(\frac{18a^4b^3}{9ab^3} - \frac{45a^2b^5}{9ab^3} - \frac{63ab^6}{9ab^3} \right) = \\ &= 9ab^3(2a^3 - 5ab^2 - 7b^3). \end{aligned}$$

 **Примечание.** Обычно частные членов многочлена и вынесенного множителя находят устно, поэтому принята краткая запись:

$$18a^4b^3 - 45a^2b^5 - 63ab^6 = 9ab^3(2a^3 - 5ab^2 - 7b^3).$$

 **Пример 3.** Разложить на множители выражение $a(x - y) + b(y - x)$.

Решение. Заметим, что выражение $y - x$ тождественно равно выражению $-(x - y)$, значит:

$$a(x - y) + b(y - x) = a(x - y) - b(x - y).$$

Вынесем за скобки общий множитель $(x - y)$:

$$a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b).$$

 **Пример 4.** Сократить дробь $\frac{a^2 + ab}{3a + 3b}$.

Решение. Чтобы выяснить, какой общий множитель имеют числитель и знаменатель дроби, разложим их на множители:

$$\frac{a^2 + ab}{3a + 3b} = \frac{a(a + b)}{3(a + b)}.$$

Двучлен $a + b$ является общим множителем числителя и знаменателя. Сократим дробь на этот множитель:

$$\frac{a(a+b)}{3(a+b)} = \frac{a}{3}.$$

Пример 5. Решить уравнение $2x^2 + 5x = 0$.

Решение. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$x(2x + 5) = 0.$$

Это произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю:

$$x = 0 \text{ или } 2x + 5 = 0.$$

Решив уравнение $2x + 5 = 0$, получим $x = -2,5$.

Следовательно, уравнение $2x^2 + 5x = 0$ имеет два корня: 0 и $-2,5$.

Пример 6. Найти значение многочлена $x^3 + 5,6x^2 - 6,2x + 12,4$ при $x = 0,6$.

Решение. Преобразуем данный многочлен к виду, удобному для вычислений:

$$\begin{aligned} x^3 + 5,6x^2 - 6,2x + 12,4 &= (x^2 + 5,6x - 6,2)x + 12,4 = \\ &= ((x + 5,6)x - 6,2)x + 12,4. \end{aligned}$$

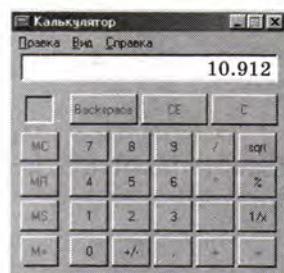
При $x = 0,6$ имеем:

$$\begin{aligned} ((0,6 + 5,6)0,6 - 6,2)0,6 + 12,4 &= (6,2 \cdot 0,6 - 6,2)0,6 + 12,4 = \\ &= 6,2 \cdot (-0,4) \cdot 0,6 + 12,4 = 6,2(-0,24 + 2) = 6,2 \cdot 1,76 = 10,912. \end{aligned}$$

Ответ: 10,912.

Примечание. На калькуляторе, конечно, вычисления выполняются быстрее, особенно если пользоваться клавишами MS и MR, первая из которых запоминает число, а вторая вызывает число из памяти. Программа вычисления данного выражения выглядит так:

$$0,6 \text{ MS} + 5,6 * \text{MR} - 6,2 * \text{MR} + 12,4 =.$$



Упражнения

330. Вычислите рациональным способом:

- | | |
|------------------------------------|---|
| 1) $34 \cdot 3,4 + 6,6 \cdot 34$; | 3) $\frac{8}{7} \cdot \frac{11}{13} + \frac{11}{13} \cdot \frac{6}{7}$; |
| 2) $123 \cdot 89 - 89 \cdot 23$; | 4) $\frac{13}{17} \cdot \frac{11}{8} - \frac{3}{8} \cdot \frac{13}{17}$. |

Какими свойствами арифметических действий вы воспользовались?

331. Вынесите за скобки общий множитель:

- | | |
|----------------------|--|
| 1) $4a + 46$; | 7) $-\frac{2}{5}y^2 + \frac{3}{25}y$; |
| 2) $12x - 6y$; | 8) $a^2 - 2ab$; |
| 3) $7ax - 35bx$; | 9) $xy - \frac{1}{2}xy$; |
| 4) $30by - 35b$; | 10) $60n^2 - 36cn$; |
| 5) $9ab + 12a$; | 11) $216by^3 - 240b^2y$; |
| 6) $0,3x + 0,6x^2$; | 12) $-252a^3x^4 - 84a^4$. |

332. Разложите на множители:

- | | |
|---------------------|-------------------------------|
| 1) $y^4 + 2y^2$; | 7) $5a^{10} - 10a^5$; |
| 2) $3x^5 - 5x^3$; | 8) $24b^8 + 8b^{24}$; |
| 3) $8y^3 - 24y^6$; | 9) $10a + 15b - 20ab$; |
| 4) $9a^8 - 6a^5$; | 10) $7x - 14y + 21xy^2$; |
| 5) $x^7 - x^5$; | 11) $4x^3 + 8x^2 - 2x$; |
| 6) $b^6 - 2b^9$; | 12) $3a^3 + 15a^2b - 5ab^2$. |

333. Представьте в виде произведения одночлена и многочлена:

- | | |
|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) $p^6 - p^8 + p^4$; | 4) $20x^4 - 25x^2y^2 - 100x^3$; |
| 2) $b^2 - b^7 + b^9$; | 5) $a^2bc - ab^2c - abc^2$; |
| 3) $12a^2b - 180ab^2 - 30ab^3$; | 6) $c^3xy + c^2xy - cx^2y^2$. |

334. Разложите на множители выражение:

- | | |
|-------------------------------|----------------------------------|
| 1) $7(a + b) + x(a + b)$; | 9) $a(c - b) + k(b - c)$; |
| 2) $p(y - 3) - 3(y - 3)$; | 10) $x(y - 7) - y(7 - y)$; |
| 3) $y(a + x) + 2(a + x)$; | 11) $4a(2x - 9) + 5b(2x - 9)$; |
| 4) $3(b - y) - k(b - y)$; | 12) $7p(3n - p) - 5n(p - 3n)$; |
| 5) $12c(c - y) - 6y(c - y)$; | 13) $(x - y)^2 - 3(y - x)$; |
| 6) $(a + y) - 2a(a + y)$; | 14) $(2a - 3b)^2 - a(3b - 2a)$; |
| 7) $2a - 3b + k(2a - 3b)$; | 15) $3(a - 2)^2 - a(2 - a)$; |
| 8) $6x(x - z) + (x - z)^2$; | 16) $8(8 - x) - 3(x - 8)^2$. |

335. Сократите дробь:

1) $\frac{5a(b-2)}{10(b-2)}$;

5) $\frac{3a-6b}{5a-10b}$;

2) $\frac{-35b(x+2y)}{14c(x+2y)}$;

6) $\frac{8n-12k}{10n-15k}$;

3) $\frac{15a^2(a-b)}{20ab(b-a)}$;

7) $\frac{12x-4y}{3y-9x}$;

4) $\frac{72y(3y-c)}{60c(c-3y)}$;

8) $\frac{15p-10c}{200c-300p}$.

336. Сократите дробь:

1) $\frac{3a+12b}{6ab}$;

3) $\frac{5y^2}{8xy^2-3y^2}$;

5) $\frac{xy-3x}{6y-18}$;

2) $\frac{a^2-6a}{3a^2}$;

4) $\frac{2a^2b}{4a^2-6ab}$;

6) $\frac{ac-5c}{3a-15}$.

337. Сократите дробь:

1) $\frac{(x-y)^2}{2x-2y}$;

3) $\frac{-a(b-n)^3}{ab-an}$;

5) $\frac{24a^2-60ab}{12ab-30b^2}$;

2) $\frac{6y-12c}{24(y-2c)^2}$;

4) $\frac{bc-c^2}{-c(b-c)^2}$;

6) $\frac{27x^2-36xy}{9xy-12y^2}$.

338. Найдите значение дроби:

1) $\frac{5a^3-10a^2}{(a-2)^2}$ при $a=1,8$;

2) $\frac{6(b-3)^2}{3b^3-9b^2}$ при $b=1,2$;

3) $\frac{2abc-ac^2}{2b^2-bc}$ при $a=-1\frac{2}{3}$, $b=\frac{1}{6}$, $c=\frac{1}{2}$;

4) $\frac{xy+2xz}{y^2z+2yz^2}$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{6}$, $z=-\frac{1}{8}$.

339. Докажите, что значение выражения:

1) $45^6 - 45^5$ кратно 44;

4) $15^{10} - 15^8$ кратно 224;

2) $29^8 + 29^9$ кратно 30;

5) $3^6 + 3^4$ кратно 90;

3) $5^{17} - 5^{15}$ кратно 24;

6) $7^8 + 7^6$ кратно 350.

340. Решите уравнение:

1) $x^2 - x = 0$;

4) $10z^2 + 7z = 0$;

2) $y^2 - 4y = 0$;

5) $x(3x-5) - 4(3x-5) = 0$;

3) $5y^2 - y = 0$;

6) $2y(9y-6) + 5(6-9y) = 0$.

341. Преобразуйте многочлен к виду, удобному для вычислений, и найдите значение:

- 1) $x^2 + 83x + 43$ при $x = 17$;
- 2) $x^2 + 0,61x + 2,22$ при $x = 1,39$;
- 3) $x^3 - 19x^2 - 800x + 80$ при $x = 39$;
- 4) $x^3 + 1,57x^2 + 0,14x - 0,23$ при $x = 0,43$;
- 5) $x^4 + 0,39x^3 - 0,61x^2 + 2x - 0,22$ при $x = 0,61$;
- 6) $x^4 - 24x^3 - 180x^2 + 180x + 30$ при $x = 30$.

342. Найдите значение выражения:

- 1) $x^3 - 3,5x^2 + 2,5x - 4$ при x , равном:
0,2; 0,4; 0,6; 0,8;
- 2) $x^3 + 3,2x^2 - 2,4x + 3$ при x , равном:
-0,5; 0,5; 1,5; 2,5;
- 3) $x^4 - 25x^3 + 45x^2 - 8,5x - 1,37$ при x , равном:
-1,2; -0,6; 0,6; 1,2;
- 4) $x^4 - 32x^3 - 18x^2 + 13x + 5,02$ при x , равном:
-3,5; -2,5; -0,5; 0,5.



Контрольные вопросы и задания

1. Укажите несколько множителей, общих для членов многочлена $18ab^2c^8 - 24a^3b^3x^2 + 42a^2b^4cx$.
2. Разложите на множители многочлен $72a^{24} - 60a^{18}$.
3. Сократите дробь $\frac{7x^2 - 14x}{4xy - 8y}$.

§ 9. Произведение многочленов

22. Преобразование произведения двух многочленов

На рисунке 44 изображен прямоугольник, длина которого — сумма отрезков a и b , а ширина — сумма отрезков c и d .

Площадь этого прямоугольника равна произведению его длины и ширины

$$(a + b)(c + d).$$

Ту же площадь можно найти как сумму площадей четырех прямоугольников

$$ac + bc + ad + bd.$$

Мы выразили двумя способами одну и ту же площадь, значит,

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd.$$

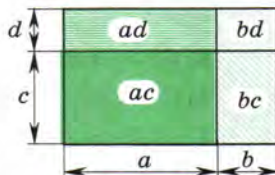


Рис. 44

Проведенные рассуждения позволяют утверждать справедливость этого равенства только для положительных значений переменных a, b, c и d . Докажем, что оно верно при любых значениях переменных.

Умножим выражение $a + b$ на сумму $c + d$:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d.$$

Далее получим: $(a + b)c + (a + b)d = ac + bc + ad + bd$. Следовательно, равенство $(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd$ является тождеством.

Аналогично, для произведения двучлена и трехчлена:

$$(a + b)(x + y + z) = ax + bx + ay + by + az + bz.$$

Вообще, *произведение двух многочленов тождественно равно сумме произведений каждого члена одного многочлена и каждого члена другого.*

Обычно пользуются следующим *правилом*.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого и сложить полученные произведения.

 **Пример.** Преобразовать в многочлен стандартного вида произведение многочленов $a^2 - 5a + 6$ и $7a - 9$.

Решение. $(a^2 - 5a + 6)(7a - 9) =$
 $= a^2 \cdot 7a - 5a \cdot 7a + 6 \cdot 7a + a^2 \cdot (-9) - 5a \cdot (-9) + 6 \cdot (-9) =$
 $= 7a^3 - 35a^2 + 42a - 9a^2 + 45a - 54 = 7a^3 - 44a^2 + 87a - 54.$

Упражнения

343. Представьте произведение в виде многочлена:

1) $(a + 2)(b + k);$

7) $(a^2 - 7)(a + 4);$

2) $(y - 6)(x - p);$

8) $(c + 5c)(1 - 4c);$

3) $(a + x)(a - 1);$

9) $(16x^2 - 7x)(0,5x - 3);$

4) $(b - 2)(b - 3);$

10) $(b^3 - 0,8b)(5b - 2);$

5) $(2c + 7)(c - 4x);$

11) $\left(a - \frac{2}{5}\right)(a^2 + 35);$

6) $(5p + k)(p + 8k);$

12) $(y - 6y)\left(\frac{5}{6}y - \frac{2}{3}\right).$

344. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

- | | |
|----------------------------------|---|
| 1) $(x^2 - 4x)(x + 1)$; | 6) $(5b^3 - 7b^2)(b - 2)$; |
| 2) $(8x^3 - 3x^2)(2x - 3)$; | 7) $\left(\frac{1}{6}b^4 - 4b\right)\left(b - \frac{1}{3}\right)$; |
| 3) $(7y^2 + 6y)(5y - 12)$; | 8) $\left(n^2 - \frac{2}{3}\right)(n - 0,3)$; |
| 4) $(-0,63p - 0,37p)(10p + 7)$; | 9) $(a^2 - 2a + 3)(a - 4)$; |
| 5) $(3a^3 + 4a)(a - 5)$; | 10) $(a^2 - 7a - 1)(a + 6)$. |

345. Представьте в виде многочлена стандартного вида:

- 1) $(2a^2 - 5ab + b^2)(5a + 7b)$;
- 2) $(c^2 + 10cx - 3x^2)(5c^2 - 2cx)$;
- 3) $(5x^2 + 6xy - 4y^2)(2x^2 + xy - 2y^2)$;
- 4) $(9b^2 - 5b + 2)(8b^2 + 3b - 12)$.

346. Квадрат двучлена представьте в виде произведения, а затем преобразуйте в многочлен стандартного вида:

- 1) $(x + y)^2$; 2) $(p - k)^2$; 3) $(2a - 7)^2$; 4) $(5c + 3)^2$.

347. Докажите, что произведение тождественно равно двучлену:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$; | 3) $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1)$; |
| 2) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$; | 4) $(y + 1)(y^3 - y^2 + y - 1)$. |

348. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

- | | |
|------------------------------|--------------------------------|
| 1) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)$; | 3) $(3a - 1)(a + 5)(a - 7)$; |
| 2) $(y - 5)(y + 4)(y + 1)$; | 4) $(3a - 1)(2a + 2)(a + 3)$. |

349. Упростите выражение:

- 1) $(x - 5)(x + 4) - x(x - 1)$;
- 2) $(a + 6)(a - 4) - a(a + 2)$;
- 3) $(2b - 7)(b + 3) - b(2b - 4)$;
- 4) $(6y - 1)(2y - 8) - (3y - 4)(4y - 2)$;
- 5) $x^3 - (x^2 - 3x)(x + 3)$;
- 6) $5b^3 - (a^2 + 5b)(ab - b^2)$;
- 7) $(a^2 - 7)(a + 2) - (2a - 1)(a - 14)$;
- 8) $(2 - b)(1 + 2b) + (1 + b)(b^2 - 3b)$.

350. Найдите значение выражения:

- 1) $(x - 5)(x - 3) - (x + 1)(x + 2)$ при $x = -2\frac{10}{11}$;
- 2) $(a + 6)(a - 2) - (a - 7)(a + 1)$ при $a = 0,51$;

$$3) \circ (a^2 - ab + 2b^2)(a - b) - (a^2 + 2ab - b^2)(a + 2b)$$

при $a = -1\frac{1}{3}$, $b = -1\frac{1}{8}$;

$$4) \circ (a^2 + 4ax + x^2)(a - 2x) - (a^2 - 5ax - 2x^2)(a + x)$$

при $a = -1\frac{1}{9}$, $x = 0,27$.

351. $\circ$ Упростите выражение:

1) $MN - PQ$, где $M = a - 3$, $N = a^2 - 8a + 5$, $P = a - 8$, $Q = a^2 - 3a + 5$;

2) $AB - CD$, где $A = x^2 - 3x + 2$, $B = 2x + 5$, $C = 2x^2 + 7x + 17$, $D = x - 4$.

352. $\bullet$ Докажите, что при всех натуральных значениях n значение выражения:

1) $n(n + 22) - (n - 2)(n + 12)$ делится на 12;

2) $(n + 8)(n + 9) - n(n - 7)$ делится на 24.

353. $\circ$ Решите задачу, составляя уравнение или систему уравнений.

1) Найдите четыре последовательных натуральных числа, если известно, что разность произведения двух больших и произведения двух меньших из этих чисел равна 74.

2) Найдите три последовательных натуральных числа, зная, что если из произведения двух больших чисел вычесть квадрат меньшего числа, то получится 188.

3) Периметр прямоугольника равен 80 см. Если его длину увеличить на 4 см, а ширину уменьшить на 4 см, то его площадь уменьшится на 64 см^2 . Найдите длину и ширину прямоугольника.

4) Периметр прямоугольника равен 36 м. Если его длину увеличить на 1 м, а ширину увеличить на 2 м, то получится прямоугольник, площадь которого больше площади первоначального прямоугольника на 30 м^2 . Найдите длину и ширину первоначального прямоугольника.

5) $\bullet$ Картина вставлена в рамку, имеющую ширину 1 дм и площадь 54 дм^2 . Чему равна площадь картины без рамки, если длина картины на 3 дм больше ширины?

6) $\bullet$ На участке, имеющем форму прямоугольника, одно из измерений которого на 17 м больше другого, разбит прямоугольный газон, отстоящий от ограды на 7 м. Найдите площадь участка, если известно, что она больше площади газона на 1414 м^2 .

354. 1) Определите степень многочлена стандартного вида, к которому приводится выражение:

а) $(2x + 5)(4 - 3x)$;

б) $(1 - 3x^3)(2 + x^2)$;

в) $(x^3 + 2x + 3) - (x^4 + 3x + 1)(3 - x)$;

г) $(2x + 1)(x + 2) + (3x^3 - 2)(x - 1)$.

2) Найдите *старший член* многочлена — член, имеющий наибольшую степень.

3) Найдите свободный член многочлена — член, не содержащий переменной.

Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте правило умножения многочлена на многочлен.
2. Какое наибольшее число членов может иметь многочлен стандартного вида, тождественно равный произведению двучлена и трехчлена?
3. Какую степень имеет многочлен, равный произведению многочленов 3-й и 5-й степеней?
4. Упростите выражение $(x^2 - 2x - 3)(x - 1) - (x + 1)(x^2 - 1)$.

23. Разложение на множители способом группировки

Разложение многочлена на множители во многих случаях задача трудная или даже не имеющая решения. Мы ограничимся примерами разложения на множители, в которых результат достигается с помощью несложных приемов. С одним из них — вынесением за скобки общего множителя вы уже знакомы. Рассмотрим еще один способ.

 **Пример 1.** Разложить на множители многочлен

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 10.$$

Решение. Члены данного многочлена сгруппируем попарно — первый со вторым и третий с четвертым:

$$x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = (x^3 - 5x^2) + (2x - 10).$$

В каждой из групп вынесем за скобки общий множитель:

$$(x^3 - 5x^2) + (2x - 10) = x^2(x - 5) + 2(x - 5).$$

Мы получили сумму двух выражений, содержащих общий множитель $(x - 5)$. Вынесем этот общий множитель за скобки:

$$x^2(x - 5) + 2(x - 5) = (x - 5)(x^2 + 2).$$

Следовательно, $x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = (x - 5)(x^2 + 2)$.



Пример 2. Разложить на множители многочлен

$$3a^2 - 6bc - 2ab + 9ac.$$

Решение. Группируя, как и в предыдущем примере, члены попарно — первый со вторым и третий с четвертым, получим:

$$3a^2 - 6bc - 2ab + 9ac = (3a^2 - 6bc) + (-2ab + 9ac) = 3(a^2 - 2bc) + a(9c - 2b).$$

У полученных нами слагаемых не оказалось общего множителя. Попробуем сгруппировать члены по-другому:

$$3a^2 - 6bc - 2ab + 9ac = (3a^2 - 2ab) + (9ac - 6bc) = a(3a - 2b) + 3c(3a - 2b).$$

Вынося за скобки общий множитель $3a - 2b$, получим окончательно:

$$3a^2 - 6bc - 2ab + 9ac = (3a - 2b)(a + 3c).$$

Группировку следует производить так, чтобы после вынесения из каждой группы общего для ее членов множителя получить в скобках (если это возможно) одинаковые выражения.



Пример 3. Разложить на множители многочлен

$$a^2 + 8b - 3ac + 2ab - 12c + 4a.$$

Решение. Этот многочлен можно представить или в виде двух трехчленов, или в виде суммы трех двучленов, причем члены можно группировать различными способами:

$$\begin{aligned} & 1) a^2 + 8b - 3ac + 2ab - 12c + 4a = \\ & = (a^2 - 3ac + 2ab) + (8b - 12c + 4a) = \\ & = a(a - 3c + 2b) + 4(2b - 3c + a) = (a + 2b - 3c)(a + 4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 2) a^2 - 8b - 3ac + 2ab - 12c + 4a = \\ & = (a^2 + 4a) + (2ab + 8b) + (-3ac - 12c) = \\ & = a(a + 4) + 2b(a + 4) - 3c(a + 4) = (a + 4)(a + 2b - 3c). \end{aligned}$$

Упражнения

355. Разложите на множители выражение:

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) $a(b+c) + 3(b+c)$; | 7) $xy - x^2 + 3(x-y)$; |
| 2) $y(a-c) + 5a - 5c$; | 8) $q(n-c) - pn + pc$; |
| 3) $k(-a+b) - 2a + 2b$; | 9) $(a-b)^2 - 7(a-b)$; |
| 4) $(c-k) - c + k$; | 10) $x - y + (x-y)^2$; |
| 5) $p - q + a(p-q)$; | 11) $bx + by - (x+y)^2$; |
| 6) $c - 4p - n(c-4p)$; | 12) $(p-k)^2 - py + ky$. |

356. Представьте многочлен в виде произведения двух двучленов:

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| 1) $nx + ny + 10x + 10y$; | 6) $11x + 11y - x^2 - xy$; |
| 2) $9x + 9y + ax + ay$; | 7) $x^2 + ax - axy - a^2y$; |
| 3) $7a - 7b + an - bn$; | 8) $a^2n - anx + x^2 - ax$; |
| 4) $ac + bc - 2a - 2b$; | 9) $a^3 - 3a^2 + 2a - 6$; |
| 5) $a^2 - ab - 8a + 8b$; | 10) $3x^3 - x^2 + 12x - 4$; |

11) $5a^3c + 10a^2 - 6bc - 3abc^2$;

12) $8xy^3 - 24y^2 - 7axy + 21a$.

357. Представьте многочлен в виде произведения двучлена и трехчлена:

- 1) $an^2 - cn^2 - ap + ap^2 - cp - cp^2$;
- 2) $ax^2 + ay^2 + bx^2 + by^2 - b - a$;
- 3) $ac^2 - ax - bc^2 + cx + bx - c^3$;
- 4) $xy^2 - by^2 - ax + ab + y^2 - a$.

358. Представьте многочлен в виде произведения двух трехчленов:

- 1) $a(a+b+c) + b(-a-b-c) - 2a - 2b - 2c$;
- 2) $x(x+z-y) + y(y-x-z) + (x-y+z)$.

359. Найдите значение выражения, предварительно разложив его на множители:

- 1) $77,3 \cdot 13 + 8 \cdot 37,3 - 77,3 \cdot 8 - 13 \cdot 37,3$;
- 2) $56,2 \cdot 29 + 60,3 \cdot 41 + 43,8 \cdot 29 + 39,7 \cdot 41$.

360. Найдите значение выражения, предварительно разложив его на множители:

- 1) $a^2x - a - x + ax^2$ при $a = -1\frac{5}{8}$, $x = -\frac{8}{13}$;

$$2) 2a + ac^2 - a^2c - 2c \text{ при } a = -\frac{8}{21}, c = -5\frac{1}{4};$$

$$3) \blacksquare x^2y^2 - y^3 + xy - x^3 \text{ при } x = 0,54, y = 0,75;$$

$$4) \blacksquare 3b^3 - 6b^2c^2 - 2c^3 + bc \text{ при } b = 3,2, c = 1,25.$$

361. Сократите дробь:

$$1) \frac{ax + ay - x - y}{y^2 + xy};$$

$$4) \frac{(4 - b)^2}{ab - 4a + 3b - 12};$$

$$2) \frac{bx - b^2}{x^2 - bx - x + b};$$

$$5) \frac{5a^2 - ab - 15a + 3b}{5ab - b^2 + 15a - 3b};$$

$$3) \frac{xy + 2y - 2x - 4}{(y - 2)^2};$$

$$6) \frac{3xy - y^2 - 3x + y}{3x^2 - xy + 3x - y}.$$

362. Решите уравнение, разложив левую часть на множители и используя условие равенства произведения нулю:

$$1) x(x - 7) + x - 7 = 0;$$

$$4) \bigcirc 7y - 7 - (y - 1)^2 = 0;$$

$$2) y + 4 - y(y + 4) = 0;$$

$$5) \bullet x^3 - 5x^2 + x - 5 = 0;$$

$$3) \bigcirc (x - 6)^2 - 2(x - 6) = 0;$$

$$6) \bullet y^4 - 2y^3 - y^2 + 2y = 0.$$

363. Впишите пропущенные одночлены так, чтобы получилось тождество:

$$1) 6a^3 - 15a^2b - 14ab + \dots = (2a - 5b)(\dots - \dots);$$

$$2) 12x^3 + 42x^2y - \dots - 35y^3 = (\dots - \dots)(6x^2 - 5y^2);$$

$$3) 24c^4 - 18a^3 - 4ab^3 + \dots = (\dots - \dots)(\dots - \dots);$$

$$4) 36y^5 - 54y^4 + 10y - \dots = (\dots - \dots)(\dots + \dots).$$

364. Составляя уравнение или систему уравнений, решите задачу.

1) Мотоциклист выехал из города M в город N . Если он будет ехать со скоростью 35 км/ч, то опоздает к назначенному сроку на 2 ч, если же он будет ехать со скоростью 50 км/ч, то приедет в N на 1 ч раньше срока. Сколько километров должен проехать мотоциклист?

2) Турист на привале рассчитал, что если дальше пойдет со скоростью 5 км/ч, то опоздает на 1 ч. Поэтому он сел в попутную машину и прибыл в назначенный пункт на 45 мин раньше срока. Какое расстояние проехал турист на машине, если ее скорость 40 км/ч?

3) $\bigcirc$ Турист выехал на мопеде из пункта M в пункт N со скоростью 50 км/ч. Через 24 мин после отправления из M его скорость снизилась на 10 км/ч, так как дорога пошла в гору. В результате турист прибыл в N на 18 мин

позже, чем предполагал. Сколько километров проехал турист?

4) ○ Турист вышел из поселка на железнодорожную станцию со скоростью 4 км/ч. Пройдя 5 км, он рассчитал, что при такой скорости опоздает к поезду на полчаса. Поэтому он увеличил скорость на 1 км/ч и пришел на станцию за 6 мин до отправления поезда. Сколько километров прошел турист от поселка до станции?

365. Разложите на множители:

1) $x^{n+1} - x^n + x - 1$; 2) $x^n - 2x^{n-1} - 2x + 4$.



Контрольные вопросы и задания

- 1) Разложите на множители многочлен $12a^2 - 8ab - 9ax + 6bx$.
2) Сделайте проверку, приводя полученное произведение к многочлену стандартного вида.
2. Сократите дробь $\frac{ab - 7a + 4b - 28}{4ab - 28a}$.
3. Докажите, что $313^2 - 313 \cdot 299$ делится на 7.

§ 10. Формулы сокращенного умножения

24. Квадраты суммы, разности и разность квадратов

С некоторыми выражениями в алгебраических преобразованиях приходится иметь дело чаще, чем с другими. Пожалуй, наиболее часто встречаются выражения $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ и $a^2 - b^2$, т. е. *квадрат суммы, квадрат разности и разность квадратов*. Вы заметили, что названия указанных выражений как бы не закончены, так, например, $(a + b)^2$ — это, конечно, не просто квадрат суммы, а квадрат суммы a и b . Однако квадрат суммы a и b встречается не так уж часто, как правило, вместо букв a и b в нем оказываются различные, иногда довольно сложные выражения.

Выражения $(a + b)^2$, $(a - b)^2$ нетрудно преобразовать в многочлены стандартного вида, собственно, вы уже встречались с таким заданием при умножении многочленов:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Заменим в полученном тождестве $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ букву b на $-b$:

$$(a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Полученные тождества полезно запомнить и применять без промежуточных выкладок. Помогают этому краткие словесные формулировки.

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Квадрат суммы
равен сумме квадратов
и удвоенного
произведения.

$$(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

Квадрат разности
равен сумме квадратов без
удвоенного произведения.

С третьим выражением связана задача разложения на множители, которая решается с помощью оригинальной группировки:

$$a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a(a - b) + b(a - b) = (a - b)(a + b).$$

Разность квадратов равна
произведению разности на сумму.

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Эти три тождества позволяют в преобразованиях заменять свои левые части правыми и обратно — правые части левыми. Самое трудное при этом — увидеть соответствующие выражения и понять, чем в них заменены переменные a и b . Рассмотрим несколько примеров использования формул сокращенного умножения.

✓ Пример 1. Привести к многочлену стандартного вида выражение $(3c - d^3)^2$.

Решение. Данное выражение — квадрат разности $3c$ и d^3 , значит, в формулу квадрата разности нужно подставить вместо a выражение $3c$, а вместо b — выражение d^3 :

$$(3c - d^3)^2 = (3c)^2 + (d^3)^2 - 2(3c)(d^3) = 9c^2 + d^6 - 6cd^3.$$

✓ Пример 2. Упростить выражение:

$$(a + b)^2 + 2(a + b)(a - b) + (a - b)^2.$$

Решение. В данном выражении сразу видны фрагменты всех трех наших формул. Однако не будем спешить их применять и внимательно посмотрим на это выражение. Можно заметить, что оно состоит из суммы квадратов выражений $a + b$ и $a - b$ и удвоенного произведения этих выражений. Но тогда это — правая часть формулы квадрата суммы! Получим: $(a + b)^2 + 2(a + b)(a - b) + (a - b)^2 = ((a + b) + (a - b))^2 = (2a)^2 = 4a^2$.

Приведение к многочленам стандартного вида с помощью рассмотренных тождеств сокращает время умножения многочлена на многочлен. Поэтому и сами тождества называют *формулами сокращенного умножения*.

 **Пример 3.** Разложить на простые множители число 391.

Решение. Подбирать простые множители здесь долго, однако можно воспользоваться тем, что данное число на 9 меньше, чем число 400, которое является квадратом числа 20. Дальнейшее решение сложностей не представляет: $391 = 400 - 9 = 20^2 - 3^2 = (20 - 3)(20 + 3) = 17 \cdot 23$. Числа 17 и 23 являются простыми.

 **Пример 4.** Решить уравнение $9x^2 - 30x - 11 = 0$.

Решение. Заметив, что первый член является квадратом выражения $3x$, представим $30x$ как удвоенное произведение: $30x = 2 \cdot 3x \cdot 5$. Чтобы получить правую часть формулы квадрата разности, нам не хватает 5^2 . Значит, $9x^2 - 30x = (3x - 5)^2 - 5^2$. С учетом этого имеем:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 30x - 11 &= 0, (3x - 5)^2 - 5^2 - 11 = 0, \\ (3x - 5)^2 - 36 &= 0, (3x - 5)^2 = 36. \end{aligned}$$

Это равенство может выполняться в двух случаях, когда $3x - 5 = 6$ или $3x - 5 = -6$.

В первом случае получаем $x = \frac{11}{3}$, а во втором — $x = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}$.

 **Примечание.** Преобразование $9x^2 - 30x - 11 = (3x - 5)^2 - 36$ называют *выделением полного квадрата двучлена*.

Упражнения

366. Запишите выражение:

- 1) квадрат суммы x и y ;
- 2) квадрат разности n и m ;
- 3) разность квадратов a и b ;
- 4) сумма квадратов 5 и 3 и удвоенного произведения этих чисел;
- 5) сумма квадратов 7 и 4 без их удвоенного произведения;
- 6) произведение разности чисел a и 8 и их суммы.

367. Прочитайте выражение:

- | | |
|------------------|------------------------------|
| 1) $(a - b)^2$; | 5) $(2 - x)(2 + x)$; |
| 2) $c^2 - d^2$; | 6) $a^2 + b^2 - 2ab$; |
| 3) $x^2 + y^2$; | 7) $y^2 + z^2 + 2yz$; |
| 4) $(k + n)^2$; | 8) $c^2 + (3d)^2 - 2c(3d)$. |

368. Запишите удвоенное произведение:

- | | | |
|------------------|--|--------------------------|
| 1) 34 и 12; | 4) $25x$ и $-6z$; | 7) $k - 1$ и $k + 1$; |
| 2) -6 и $-d$; | 5) $-\frac{1}{2}a$ и $-\frac{3}{5}c$; | 8) $3t + 2$ и $2t - 1$. |
| 3) $3a$ и $5b$; | 6) $x + y$ и $-z$; | |

369. Представьте в виде удвоенного произведения:

- | | |
|------------|--------------------------|
| 1) 34; | 4) $1,5a^2b$; |
| 2) -7 ; | 5) c^3d ; |
| 3) $6xy$; | 6) $\frac{1}{3}n^4m^3$. |

370. Выберите формулу, которая поможет вам ответить на вопрос.

- 1) Может ли квадрат суммы двух чисел оказаться меньше суммы их квадратов?
- 2) Может ли разность квадратов двух натуральных чисел оказаться простым числом?
- 3) Может ли квадрат разности двух чисел быть больше разности их квадратов?
- 4) Может ли сумма квадратов двух отличных от нуля чисел быть равной квадрату их суммы?
- 5) Может ли квадрат суммы двух неравных чисел быть меньше их удвоенного произведения?

371. Может ли разность квадратов двух чисел быть больше суммы квадратов тех же чисел?

372. Выберите формулу, которая поможет вам найти:

- 1) сумму двух чисел, зная, что разность данных чисел равна 4, а разность их квадратов равна 104;
- 2) произведение двух чисел, зная, что квадрат их суммы равен 196, а сумма их квадратов равна 106;
- 3) разность двух чисел, зная, что их сумма равна 18, а разность их квадратов равна 72;
- 4) сумму квадратов двух чисел, зная, что квадрат разности данных чисел равен 16, а произведение равно 96.

373. Вычислите с помощью формул сокращенного умножения:

- 1) $(100 + 1)^2$;
- 2) $(80 - 1)^2$;
- 3) $10,01^2$;
- 4) $9,98^2$;
- 5) $37^2 + 2 \cdot 37 \cdot 63 + 63^2$;
- 6) $83^2 + 33^2 - 83 \cdot 66$;
- 7) $19,32 + 2 \cdot 19,3 \cdot 30,7 + 30,7^2$;
- 8) $31,82 - 2 \cdot 3,18 \cdot 218 + 21,82^2$;
- 9) $99 \cdot 101$;
- 10) $201 \cdot 199$;
- 11) $126^2 - 74^2$;
- 12) $356^2 - 144^2$.

374. Не выполняя вычислений, определите, является ли правильной дробь:

- | | |
|--|--|
| 1) $\frac{(328 + 294)^2}{328^2 + 294^2}$; | 3) $\frac{835^2 - 598^2}{835 + 598}$; |
| 2) $\frac{531^2 + 378^2}{(531 - 378)^2}$; | 4) $\frac{734 - 683}{734^2 - 683^2}$. |

375. Можно ли рассматривать данное выражение как левую или правую часть одной из формул сокращенного умножения? Если да, то что в этом выражении стоит вместо a и b ? Запишите другую часть формулы:

- | | |
|-------------------|--|
| 1) $(-p - 2)^2$; | 4) $\frac{9}{16} + b^2 - \frac{9}{8}b$; |
| 2) $(2x + 3)^2$; | 5) $x^2 + 12x + 36$; |
| 3) $x^2y^2 - 9$; | 6) $49 + y^2 - 14y$; |

7) $(0,1c - 5)(0,1c + 5)$;

10) $(0,16xy - 2y^2)^2$;

8) $\frac{4}{9}x^2 + 0,25y^2 + \frac{2}{3}xy$;

11) $1,21 - a^2b^4$;

9) $4a^2 + 9b^2 - 12ab$;

12) $\left(\frac{5}{7}c - \frac{1}{3}\right)\left(9 + \frac{5}{7}c\right)$.

376. Впишите пропущенные одночлены так, чтобы получилось тождество:

1) $(5x + \dots)^2 = \dots + 70xy + \dots$;

2) $(9a - \dots)^2 = \dots - \dots + 100b^2$;

3) $16b^2 - \dots = (\dots + 64a)(\dots - 64a)$;

4) $(\dots + 10a)^2 = \dots - 60an + \dots$;

5) $(c^2 - \dots)^2 = \dots - 24c^2y + \dots$;

6) $\dots - 0,09y^2 = (\dots - 0,3y)(0,3y + 3z)$;

7) $(\dots - \dots)^2 = 36a^2 - \dots + 49c^2$;

8) $(\dots + \dots)^2 = 25x^2 + 80xy + \dots$.

377. Приведите к многочлену стандартного вида выражение:

1) $(-0,8a + 50b)^2$;

2) $(-2n^2 - 0,1k)^2$;

3) $(a + x)(a - x)$;

4) $\left(-1,2p + \frac{5}{6}q\right)^2$;

5) $(9k^4 - 4n^3)^2$;

6) $(0,6bc - 5b)^2$;

7) $(0,4p^3 + 0,5pq^2)^2$;

8) $\left(\frac{5}{7}c^2d - 9\right)\left(9 + \frac{5}{7}c^2d\right)$;

9) $(0,2c^2 - n^3)(0,2c^2 + n^3)$;

10) $(-0,9ab - 0,2a^2b^3)^2$;

11) $(15a^2 - 0,1b)(0,1b + 15a^2)$;

12) $\left(\frac{1}{4}x^3 + 2y^2\right)^2$.

378. Представьте, если возможно, в виде квадрата двучлена:

1) $y^2 + 25z^2 - 10yz$;

2) $40 + a^2 + 14a$;

3) $16ab + b^2 + 64a^2$;

4) $4x^2 - 12x + 9$;

5) $25a^2 - 80ab + 64b^2$;

6) $100b^2 + 9c^2 - 60bc$;

- 7) $9y^4 + 36y^2z + 4z^2$;
 8) $72yt + 81y^2 + 16t^2$;
 9) $(a + b)^2 + 4a(a + b) + 4a^2$;
 10) $(x - y)^2 + 16y^2 - 8y(x - y)$;
 11) $(a + 3)^2 + (3 - a)^2 - 18 + 2a^2$;
 12) $(4z - 1)^2 - (4z - 1)(z - 1) + (z - 1)^2$.

379. Поставьте вместо многоточия одночлен так, чтобы выражение можно было представить в виде квадрата двучлена:

- 1) $b^2 + 20b + \dots$; 4) $\dots - 40a^2b + 25b^2$;
 2) $y^2 - 14y + \dots$; 5) $64p^2y^6 + 9x^2y^2 \dots$;
 3) $81c^2 + 49y^2 - \dots$; 6) $16x^4 - 8x^2y^3 \dots$.

380. Решите уравнение:

- 1) $x^2 - 49 = 0$; 5) $x^2 + 4x - 5 = 0$;
 2) $x^2 + 9 + 6x = 0$; 6) $25x^2 - 144 = 0$;
 3) $4x^2 = 9$; 7) $x^2 - 10x - 24 = 0$;
 4) $4x^2 + 16x = 9$; 8) $16x^2 = 32 + 56x$.

381. Приведите к многочлену стандартного вида:

- 1) $(x - 3)^2 - x(x + 9)$;
 2) $(2a + 5)^2 - 5(4a + 5)$;
 3) $(a - 3)(a + 3) + a(a + 4)$;
 4) $(4x + 5y)^2 - (4x - 5y)^2$;
 5) $(b + 7c)^2 - (7c - b)^2$;
 6) $(4 - y)(4 + y)(16 + y^2)$;
 7) $(p - 3)^2(p + 3)^2$;
 8) $(10 - c^2)(10 + c^2)(100 + c^4)$.

382. Если возможно, разложите на множители многочлен:

- 1) $a^2 - 25$; 9) $0,04x^2 + 1,2x + 9$;
 2) $a^2 + 2ac + c^2$; 10) $y^2 + 26z - 10yz$;
 3) $1 - 4c + c^2$; 11) $0,64c^2y^2 - 0,01$;
 4) $y^2 - 1\frac{24}{25}$; 12) $144c^4 - 121d^2$;
 5) $0,09 - x^2$; 13) $a^2b^2 + 1$;
 6) $p^2 - 2pq + q^2$; 14) $49a^2 + 14ab + 4b^2$;
 7) $a^2 + 36 + 12a$; 15) $100y^2 + 9x^2 - 60xy$;
 8) $c^2 - 1\frac{9}{16}d^2$; 16) $81y^2 + 16t^2 - 72yt$.

383. Сократите дробь:

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{2a-2b}{a^2-b^2}; & 4) \frac{(q+7)^2}{(49-q^2)^2}; & 7) \frac{x^2-2xy+y^2}{(7x-7y)^2}; \\ 2) \frac{(5a+5b)^2}{a^2+2ab+b^2}; & 5) \frac{c^2-25}{(c+5)^2}; & 8) \frac{a^2c^2-b^2c^2}{(ax-bx)^2}; \\ 3) \frac{a^2-100}{a^2-20a+100}; & 6) \frac{c^2-16}{(c-4)^2}; & 9) \frac{(ac+bc)^2}{(ax+bx)^2}. \end{array}$$

384. Представьте выражение в виде произведения многочленов:

$$\begin{array}{ll} 1) (x+3)^2-1; & 4) x^2-(2x-1)^2; \\ 2) 64-(b+1)^2; & 5) (y-1)^2-(5y-7)^2; \\ 3) (4a-3)^2-16; & 6) (a-1)^2-(a+1)^2. \end{array}$$

385. Докажите, что выражение имеет одно и то же значение при любых значениях переменной:

$$\begin{array}{l} 1) (a+8)^2-2(a+8)(a-2)+(a-2)^2; \\ 2) (y-7)^2-2(y-7)(y-9)+(y-9)^2. \end{array}$$

386. Докажите, что:

$$\begin{array}{l} 1) \frac{(a+3)^2+(a-3)^2}{a^2+9} = 2; \\ 2) \frac{(2x+5)^2+(5x-2)^2}{x^2+1} = 29; \\ 3) \frac{b^2-4+(b+2)^2}{b^2+2b} = 2; \\ 4) \frac{(2y-5)^2-(2y+5)^2}{(y^2-5y)-(y^2-7y)} = -20. \end{array}$$

387. Сократите дробь:

$$\begin{array}{ll} 1) \frac{b^2-12b+36}{(b-5)^2-1}; & 3) \frac{25c^2+70c+49}{(6c+7)^2-c^2}; \\ 2) \frac{(k-6)^2-4}{k^2-16k+64}; & 4) \frac{9p^2-12pq+4q^2}{q^2-(3p-3q)^2}. \end{array}$$

388. Разложите на простые множители число:

$$1) 319; \quad 2) 851; \quad 3) 1431; \quad 4) 2419.$$

389. Докажите, что при любом натуральном n значение выражения:

$$\begin{array}{l} 1) (n+7)^2-n^2 \text{ делится на } 7; \\ 2) (4n+5)^2-9 \text{ делится на } 8; \\ 3) * n^3-n \text{ делится на } 6. \end{array}$$

390. Докажите тождество:

1) $a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2}$;

2) $(2a+b)^2 + b^2 = 2(a^2 + (a+b)^2)$;

3) $\left(\frac{x}{k}\right)^2 - \left(\frac{y}{k}\right)^2 = \frac{1}{k^2}(x-y)(x+y)$;

4) $(kx - ky)^2 = k^2(x - y)^2$.

391. Одна из самых знаменитых теорем геометрии, теорема Пифагора, гласит, что сумма квадратов катетов любого прямоугольного треугольника равна квадрату его гипотенузы.

1) Докажите тождество $(2mn)^2 + (m^2 - n^2)^2 = (m^2 + n^2)^2$, которое позволяет получить бесконечно много прямоугольных треугольников, длины сторон которых являются натуральными числами.

2) Найдите несколько таких прямоугольных треугольников, придавая значения переменным m и n .

392. Докажите тождество Л. Эйлера: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$. Это тождество показывает, что произведение чисел, каждое из которых является суммой квадратов натуральных чисел, также можно представить в виде суммы квадратов натуральных чисел.

393. Сравните площади квадрата и прямоугольника, зная, что основание прямоугольника на 10 см больше, а высота на 10 см меньше стороны квадрата.

394. Решите уравнение, предварительно представив левую часть в виде произведения трех множителей, каждый из которых содержит переменную:

1) $x^4 - x^2 = 0$;

4) $x^4 - 1 = 0$;

2) $x^3 - 4x = 0$;

5) $x^2(x - 1) - 25(x - 1) = 0$;

3) $x^2 - 9x^4 = 0$;

6) $x^2(x - 3) - x + 3 = 0$.

395. Преобразуйте выражение $2xy(x^2 + y^2)$ в многочлен стандартного вида с переменными a и b , если $x = 1 + \frac{1}{2}ab$,

$y = 1 - \frac{1}{2}ab$.

396. Используя формулу квадрата суммы и правило умножения многочленов, преобразуйте в многочлен стандартного вида выражение:

1) $(a + b)^3$;

2) $(a - b)^3$;

3) $(a + b)^4$;

4) $(a - b)^4$.

397. Докажите устно, что при любом значении переменной значение выражения — положительное число:

- | | |
|----------------------|------------------------|
| 1) $a^2 + 5$; | 5) $x^2 + 18x + 90$; |
| 2) $7 + d^2$; | 6) $c^2 - 22c + 122$; |
| 3) $(7 - x)^2 + 1$; | 7) $p^2 + 42p + 442$; |
| 4) $(b - 4)^2 + 3$; | 8) $y^2 - 30y + 250$. |

398. Представьте в виде суммы квадратов двух выражений:

- | | |
|-----------------------------|------------------------------------|
| 1) $a^2 + b^2 - 6a + 9$; | 4) $a^2 - 6ab + 10b^2$; |
| 2) $x^2 + y^2 + 10y + 25$; | 5) $b^2 - 2bc + 2c^2 + 14c + 49$; |
| 3) $2x^2 + 2xy + y^2$; | 6) $5n^2 + 4ny + y^2 - 8n + 16$. |

399. Найдите такие значения M , при которых можно представить в виде квадрата двучлена выражение:

- 1) $(3x - 5)^2 + (4x + 12)^2 + Mx$;
- 2) $(17x + 10)^2 - (15x - 8)^2 + Mx$.

400.* Впишите в скобки пропущенные члены так, чтобы при всех значениях x значение выражения было одним и тем же:

- 1) $(4x - 7)^2 + (3x + 6)^2 - (\dots - \dots)^2$;
- 2) $(17x - 2)^2 - (15x - 6)^2 - (\dots - \dots)^2$.

401. Решите уравнение:

- 1) $x^2 + y^2 = 0$;
- 2) $(x - y)^2 + (1 - x + y)^2 = 0$.

402.* Найдите целые решения уравнения $x^2 = 2(xy - y^2 - y)$.

403. 1) С помощью рисунка 45 покажите, что для положительных значений переменных a , b и c верно равенство

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

2) Используя формулу квадрата суммы, докажите, что данное равенство является тождеством.

404. 1) Если из куба некоторого целого числа вычесть произведение трех последовательных целых чисел, среднее из которых равно данному числу, то получится 17. Найдите эти числа.

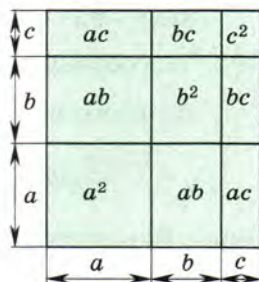


Рис. 45

$$\sum_{5 \leq n} \frac{1}{n^5} \supset \sum_{3 \leq n} \frac{1}{n^3} \supset \sum_{1 \leq n} \frac{1}{n}$$

405. Представъте в виде многочлена:

$$1) (a - 3)^2(a + 3)^2;$$

$$2) (b-d)^2(b+d)^2;$$

$$3) (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4);$$

$$4) (z - y)(z + y)(z^2 + y^2);$$

$$5) (a^3 + 5)(a^3 - 5)(a^6 + 25);$$

$$6) (c^3 + b^2)(c^3 - b^2)(c^6 + b^4);$$

$$7) (y-1)(y+1)(y^2+1)(y^4+1);$$

8) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$.

406. Найдите значение выражения, предварительно упростив его:

$$1) (3 - 2)(3 + 2)(3^2 + 2^2);$$

$$2) (171 - 169)^4(321 + 679)^4;$$

$$3)(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)-3^{16};$$

$$4)(5-3)(5+3)(52+32)(54+34)(58+38)(516+316) - (532+332);$$

$$5) (7^3 + 1)(7^3 - 1)(7^6 + 1) - 2^{12};$$

6) $(13^4 - 1)(13^4 + 1)(13^8 + 1) - 13^{16}$.

407. 1) Найдите наименьшее значение, которое может принять выражение:

a) $a^2 + 4a + 4$;

6) $(2b - 1)(2b + 1) - 3(5 - 4b)$.

2) Найдите наибольшее значение, которое может принять выражение:

а) $4b(5a - b) - (5a - 3)(5a + 3)$; б) $2ab - a^2 - 2b^2 + 4b$.

3) При каких значениях переменных достигаются эти значения?

! Контрольные вопросы и задания

1. Докажите тождество $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

2. Выполните сокращенное умножение:

$$1) \left(0,8a^5 - \frac{3}{7}b^2\right) \left(0,8a^5 + \frac{3}{7}b^2\right); \quad 2) \left(2\frac{1}{7}ab^2 + 1\frac{2}{5}a^3\right)^2.$$

3. Сократите дробь $\frac{9x^2 + 64y^2 - 48xy}{9x^2 - 64y^4}$.

25. Разложение на множители с помощью формул сокращенного умножения

Рассмотрим примеры разложения на множители, в которых способы вынесения за скобки, группировки и применения формул сокращенного умножения комбинируются.

✓ Пример 1. Разложить на множители двучлен $a^2x - 9x^3$.

Решение. Разложение на множители целесообразно начать с вынесения за скобки общего множителя x :

$$a^2x - 9x^3 = x(a^2 - 9x^2).$$

Выражение $a^2 - 9x^2$ можно разложить на множители, используя формулу разности квадратов:

$$a^2 - 9x^2 = (a - 3x)(a + 3x).$$

Следовательно, двучлен $a^2x - 9x^3$ можно разложить на три множителя, каждый из которых содержит переменную:

$$a^2x - 9x^3 = x(a - 3x)(a + 3x).$$

✓ Пример 2. Разложить на множители выражение $(c^2 + 9)^2 - 36c^2$.

Решение. Данное выражение является разностью квадратов. По соответствующей формуле имеем:

$$(c^2 + 9)^2 - 36c^2 = (c^2 + 9 - 6c)(c^2 + 9 + 6c).$$

Полученные множители можно преобразовать в квадраты двучленов, так как каждый из них состоит из квадратов двух одночленов и их удвоенного произведения:

$$c^2 + 9 - 6c = (c - 3)^2; \quad c^2 + 9 + 6c = (c + 3)^2.$$

Следовательно, $(c^2 + 9)^2 - 36c^2 = (c - 3)^2(c + 3)^2$.

✓ Пример 3. Разложить на множители многочлен $b^2 - 3b + 6y - 4y^2$.

Решение. Попытаемся разложить этот многочлен на множители с помощью группировки его членов. Группируем первый со вторым и третий с четвертым:

$$b^2 - 3b + 6y - 4y^2 = b(b - 3) + 2y(3 - 2y).$$

Мы получили в скобках два различных выражения: $(b - 3)$ и $(3 - 2y)$, значит, такая группировка членов к цели не приводит.

Группировка первого члена с третьим и второго с четвертым также не приводит к разложению многочлена на множители.

Последняя возможность попарной группировки — сгруппировать первый и последний члены и два средних члена:

$$\begin{aligned} b^2 - 3b + 6y - 4y^2 &= (b^2 - 4y^2) - (3b - 6y) = \\ &= (b - 2y)(b + 2y) - 3(b - 2y) = (b - 2y)((b + 2y) - 3) = \\ &= (b - 2y)(b + 2y - 3). \end{aligned}$$

Нам удалось разложить многочлен на два множителя: двучлен и трехчлен.



Пример 4. Разложить на множители многочлен

$$a^2 - b^2 + 10b - 25.$$

Решение. В этом примере уже никакая попарная группировка не приводит к разложению многочлена на множители, содержащие переменную. Однако, заметив, что

$$-b^2 + 10b - 25 = -(b^2 - 10b + 25) = -(b - 5)^2,$$

мы можем выполнить разложение на множители так:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 + 10b - 25 &= a^2 - (b - 5)^2 = (a - (b - 5))(a + (b - 5)) = \\ &= (a - b + 5)(a + b - 5). \end{aligned}$$

Упражнения

408. Докажите, что:

- 1) $263^2 - 184^2$ делится на 79;
- 2) $37^2 + 2 \cdot 37 \cdot 63 + 63^2$ делится на 10^4 ;
- 3) $2^{10} - 2^6 \cdot 3 + 3^2$ делится на 29^2 ;
- 4) $11^{10} - 11^9 + 11^8$ делится на 111.

409. Разложите на множители двучлен:

- | | |
|-----------------------------|---------------------------------|
| 1) $20a^2b - 45by^2$; | 4) $144b^4 - 81b^2c^4$; |
| 2) $0,64p^5 - 0,36p^3q^2$; | 5) $108x^7y^5 - 4800x^3y^3$; |
| 3) $0,3x^3y - 2,7xy^3$; | 6) $1200a^3b^4c^5 - 147ab^2c$. |

410. Разложите на множители выражение:

- 1) $20x^3 - 140x^2y + 245xy^2$;
- 2) $100k^4 - 120k^3n + 36k^2n^2$;

- 3) $(3a + 4)^2 - (a - 12)^2$;
 4) $(5x - 7)^2 - (5 - 3x)^2$;
 5) $\bigcirc (a^2 + 6ab + 16b^2)^2 - (6ab + 20b^2)^2$;
 6) $\bigcirc (4 - 6y^3 + 4y^6)^2 - (6y^3 - 5y^6)^2$.

411. Представьте в виде произведения многочленов:

- 1) $a(x^2 - y^2) - 5(x + y)$; 5) $a^2 - 3a - 9b - 9b^2$;
 2) $7(a - b) - 4(a - b)^2$; 6) $x^2 - 5x - 10y - 4y^2$;
 3) $a^2 + a + b - b^2$; 7) $\bigcirc 2b^2 - 5b - 5c - 2c^2$;
 4) $x^2 + x - y^2 - y$; 8) $\bigcirc 4a^2 + 2a - 9b^2 - 3b$.

412. Представьте выражение в виде разности квадратов и разложите на множители:

- 1) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; 5) $b^2 - c^2 - 14c - 49$;
 2) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$; 6) $a^2 - x^2 + 10x - 25$;
 3) $a^2 - 18a + 81 - 4b^2$; 7) $\bigcirc a^2x^2 - 2abx + b^2 - c^2$;
 4) $y^2 + 20y + 100 - 9x^2$; 8) $\bigcirc p^2 + k^2y^2 + 2kpy - x^2$.

413. Разложите на множители:

- 1) $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 + 2ab + 2cd$;
 2) $x^2 - y^2 + a^2 - b^2 + 2ax - 2by$;
 3) $a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2ad - 2bc$;
 4) $a^2b^2 - a^2c^2 - b^2d^2 + c^2d^2 + 4abcd$.

414. Сократите дробь:

- 1) $\frac{a^2 - b^2}{a^2 - b^2 - 8a - 8b}$; 4) $\frac{100 + 2xy - x^2 - y^2}{10x + 10y + x^2 - y^2}$;
 2) $\frac{x^2 - 4x + 4y - y^2}{x^2 - y^2}$; 5) $\frac{a^2 - ab - bc - c^2}{b^2 - a^2 + 2ac - c^2}$;
 3) $\frac{b^2 - 2b + 1 - c^2}{b^2 - c^2 - b + c}$; 6) $\frac{25 - a^2 - 2ab - b^2}{a^2 + ab + 5b - 25}$.

415. Вычислите:

- 1) $\frac{518^2 - 482^2}{360}$; 4) $\frac{23^6 \cdot 22^2 \cdot 24}{23^8 - 23^6}$;
 2) $\frac{228 \cdot 13}{764^2 - 536^2}$; 5) $\frac{25^5 - 25^4 \cdot 4}{5^8 - 5^7 + 5^6}$;
 3) $\frac{52^2 - 48^2}{92^2 - 2 \cdot 92 \cdot 88 + 88^2}$; 6) $\frac{7^{11} - 7^{10} - 7^9}{67 \cdot 49^4 - 26 \cdot 7^8}$.

416. Найдите значение выражения:

1) $\frac{15a^2d^5 - 10d^7}{5d^3 + 10d^2a + 5a^2d}$ при $a = -6$, $d = -2$;

2) $\frac{a^2 - bc + ac - b^2}{a^2 + bc - ac - b^2}$ при $a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{3}{4}$, $c = -\frac{1}{5}$.

417. Решите уравнение, раскладывая его левую часть на множители и используя условие равенства произведения нулю:

1) $x^2 - 100x = 0$;

5) $x^4 - x^2 = 0$;

2) $\frac{9}{25}x^3 - x = 0$;

6) $x^5 - 49x^3 = 0$;

3) $25y^2 + 20y + 4 = 0$;

7) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$;

4) $36x^2 + 25 = 60x$;

8) $y^3 - 3y^2 - 4y + 12 = 0$.

418. * Докажите, что при любых натуральных значениях m и n , кроме $m = n = 1$, число:

1) $m^4 + 4n^4$ — составное;

2) $4m^4 + n^8$ — составное.

419. 1) Постройте график функции:

a) $y = \frac{16x^2 - 9}{4x + 3}$;

б) $y = \frac{9x^2 - 6x + 1}{3x - 1}$.

2) Найдите координаты точек пересечения построенного графика с осями координат.

420. Докажите, что равенство является тождеством:

1) $(2x + 9)^2 - 4x^2(x - 6)^2 = 3(4x + 3)(2x - 3)^2$;

2) $64(5a + 1)^2 - (25a^2 + 8)^2 = 5a(8 - 5a)(5a + 4)^2$.

421. Задачи из «Арифметики» Диофанта (III в. н. э.).

1) Докажите тождество:

$$(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2).$$

2) Воспользуйтесь тождеством Диофанта для разложения на множители многочлена:

a) $(3c + 7d)^2 + (3d - 7c)^2$;

б) $\left(5a + \frac{2}{3}b\right)^2 + \left(5a - \frac{2}{3}b\right)^2$.

422. Докажите тождество из книги Л. Эйлера «Универсальная арифметика» (1768):

$$(a^2 + bc^2)(d^2 + bk^2) = (ad + bck)^2 + b(ak - cd)^2.$$

- 423.** Софизм¹. Доказательство того, что все числа равны между собой. Обозначим произвольные два числа буквами a и b . Пусть $a > b$, тогда существует такое положительное число c , что $a = b + c$. Умножим обе части этого равенства на $a - b$ и преобразуем полученное равенство:

$$\begin{aligned}a(a - b) &= (b + c)(a - b), \\a^2 - ab &= ab + ac - b^2 - bc, \\a^2 - ab - ac &= ab - b^2 - bc, \\a(a - b - c) &= b(a - b - c).\end{aligned}$$

Разделив обе части полученного равенства на $(a - b - c)$, получим, что $a = b$. Найдите ошибку в приведенном доказательстве.



Контрольные вопросы и задания

1. Приведите пример многочлена, при разложении на множители которого нужно применить способ вынесения множителя за скобки и формулу разности квадратов.
2. Разложите на множители:
1) $b^2 - c^2 - 7b - 7c$; 2) $a^2 + 10a + 25 - y^2$.
3. Сократите дробь $\frac{y^3 - 81y}{y^2 + 18y + 81}$.

¹ *Софизм* — ложное умозаключение (неверное доказательство), кажущееся правильным.

ВЕРОЯТНОСТЬ

26. Равновероятные возможности

В XIV в. французский философ Жан Буридан придумал свой, ставший знаменитым, *парадокс*¹ о голодном осле, оказавшемся на равном расстоянии от двух совершенно одинаковых охапок сена. История закончилась для буриданова осла трагически — он не смог сделать выбор, к какой из охапок направиться, и в конце концов умер от голода.

Нам тоже случается попадать в ситуации, в которых нужно выбрать один из двух равноценных вариантов. На помощь часто приходит монетка, одна сторона которой называется *орлом*, а другая — *решкой*. Решив, что выберем первый из возможных вариантов, если выпадет орел, а второй — если решка, мы подбрасываем монету и смотрим, какой стороной вверх она упадет. Именно так, с помощью монеты, разыгрываются ворота перед началом футбольного матча. Понятно, что при этом есть всего две совершенно равноправные, или, как обычно говорят, *равновероятные, возможности*.



✓ Пример 1. В пенале у Пети лежат три шариковые ручки — одна с синей, вторая с зеленой, а третья с черной пастой. Петя наугад (не глядя в пенал) берет одну из ручек. Равновероятны ли при этом возможности:

- 1) достать синюю ручку и достать черную ручку;
- 2) достать черную ручку и достать ручку другого цвета?

¹ *Парадокс* — логически правильное рассуждение, противоречащее здравому смыслу.

Решение. В условии сказано, что ручки вынимаются наугад, значит, возможности достать любую из них равновероятны. Следовательно, возможности вытащить синюю и вытащить зеленую ручки равновероятны. Возможность же достать черную ручку явно менее вероятна, чем возможность достать одну из двух других.

Часто имеющиеся возможности только выглядят равновероятными, а на самом деле таковыми не являются, т. е. какие-то из них *более вероятны*, а другие *менее вероятны*.



Пример 2. Пете подарили три новые книги, но на дачу родители разрешили ему взять только одну из них. Петя взял две монеты и решил, что в случае выпадения двух орлов возьмет первую книгу, в случае двух решек — вторую, а если выпадут орел и решка, он возьмет с собой третью книгу. Являются ли перечисленные варианты (два орла, две решки, орел и решка) равновероятными? Если нет, то какой из них более вероятен?

Решение. Легче всего разобраться в этой ситуации, взяв две монеты разного достоинства, например 1-рублевую и 2-рублевую. При их бросании возникают четыре равновероятные возможности: орел—орел, орел—решка, решка—орел и решка—решка. Мы видим, что вариант, когда выпадают орел и решка, имеет место в двух случаях из четырех, т. е. в половине всех возможных случаев, а каждый из двух других вариантов — в одном. Значит, варианты два орла, две решки и орел—решка не равновероятны — более вероятен вариант орел—решка.

З а м е ч а н и е. Петя мог бы сделать варианты выбора книги равновероятными, используя вместо монет, например, пенал с тремя ручками из примера 1.

Упражнения

424. 1) Сколько вариантов выпадения очков возможно при бросании одной игральной кости (кубика идеальной кубической формы из однородного материала, на гранях которого нанесены точки от одной до шести)?

2) Равновероятны ли эти варианты?



425. В колоде 36 карт. Из колоды наугад вытаскивают одну карту.

1) Сколько при этом имеется разных возможностей?

2) Равновероятны ли возможности:

а) вытащить десятку бубен и вытащить пиковую даму;

б) вытащить валета и вытащить короля;

в) вытащить туза и вытащить какую-нибудь карту бубновой масти? Если нет, то какая из этих возможностей более вероятна?

426. Из коробки, в которой лежат 6 бильярдных шаров с номерами от 1 до 6, наугад вытаскивают один шар.

1) Сколько существует возможностей вытащить шар?

2) Равновероятны ли возможности вытащить черный и красный шары, если в коробке: а) 3 черных и 3 красных шара; б) 2 черных и 4 красных шара?

Если нет, то какая из этих возможностей более вероятна?

427. Для праздничной школьной лотереи изготовили 100 билетов. На каждый из этих билетов может выпасть один из 55 выигрышей.

1) Сколько существует возможностей: а) купить какой-нибудь билет лотереи; б) купить билет, который выиграет; в) купить билет, который не выиграет?

2) Равновероятны ли возможности купить выигрышный и невыигрышный билеты? Если нет, то какая из возможностей менее вероятна?

428. Сколько очков в сумме может выпасть при двух бросаниях игральной кости? Являются ли все эти возможности равновероятными?

429. На рисунке 46 изображен квадрат для игры в «Морской бой» (обычно, правда, по горизонтали ставят не числа, а буквы). Каждый из игроков составляет в своем квадрате 4 одноклеточных, 3 двухклеточных, 2 трехклеточных и один четырехклеточный корабль так, чтобы между соседними кораблями оставался промежуток. Затем игроки по

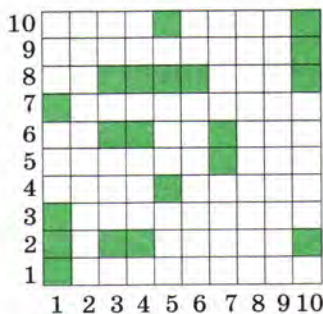


Рис. 46

очереди делают «выстрелы» — называют координаты некоторой клетки.

Если в указанной клетке оказался корабль противника, то эта клетка вычеркивается, и игрок делает следующий выстрел.

Если в названной клетке корабля не оказывается, очередь стрелять переходит к противнику.

Проигрывает тот из игроков, чьи корабли оказываются полностью вычеркнуты (потоплены).

Саша и Петя начинают игру в «Морской бой», и Петя ходит первым.

1) Сколькими способами Петя может начать игру?

2) Сколько среди них возможностей:

а) попасть в цель;

б) промахнуться?



Контрольные вопросы и задания

1. Приведите примеры равновероятных возможностей и возможностей, которые не являются равновероятными.
2. На десяти карточках записаны целые числа от 0 до 9. Наугад выбирают две карточки и находят сумму записанных на них чисел. Равновероятны ли возможности получить в сумме число 1 и число 9? Если нет, то какая сумма более вероятна?

27. Вероятность события

Слова «более вероятен» или «менее вероятен» выражают только очень грубую сравнительную оценку вероятности разных событий. Во многих случаях такой информации недостаточно, поэтому вероятности выражают числами. Вероятность событий, которые обязательно произойдут (такие события называют *достоверными*), считают равной 1, а события, которые не могут произойти (так называемые *невозможные* события), имеют нулевую вероятность.

Вероятность достоверного события равна 1.

Вероятность невозможного события равна нулю.

Когда мы бросаем монету, достоверным событием является то, что монета обязательно упадет или орлом, или решкой вверх, а невозможным событием можно считать, например, что монета упадет на ребро. Вероятность достоверного собы-

тия при бросании монеты поровну распределяется между выпадением орла и выпадением решки. В математике для обозначения вероятности события обычно используют букву P^1 . Обозначим вероятность выпадения орла или решки как $P_{\text{орел или решка}}$, вероятность выпадения орла как $P_{\text{орел}}$, а вероятность выпадения решки — $P_{\text{решка}}$. Тогда получаем:

$$P_{\text{орел или решка}} = P_{\text{орел}} + P_{\text{решка}} = 1.$$

Поскольку вероятности выпадения орла и выпадения решки равны, имеем:

$$P_{\text{орел}} = P_{\text{решка}} = \frac{1}{2}.$$

 **Пример 1.** Найти вероятность выпадения двух очков при бросании игральной кости.

Решение. При бросании игральной кости достоверным событием является выпадение 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков. Все эти шесть исходов равновероятны, и никакие два из них не могут случиться одновременно, значит, вероятность достоверного события — 1 — поровну распределяется между ними. Поэтому вероятность каждого из них и, в частности, вероятность выпадения двух очков равна $\frac{1}{6}$.

В большинстве задач интересующее нас событие может произойти не в одном, а в нескольких из числа возможных исходов.

 **Пример 2.** Какова вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число очков, большее 4?

Решение. Число очков, большее 4, — это 5 или 6. Значит, интересующее нас событие происходит, когда выпадает 5 или 6 очков, т. е. в двух из всех шести равновероятных исходов бросания игральной кости. Вероятность каждого из этих вариантов равна $\frac{1}{6}$, значит,

$$P_{5 \text{ или } 6} = P_5 + P_6 = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

¹ P — первая буква французского слова *probabilité*, которое в переводе означает «вероятность».

Заметим, что вероятность находится как сумма дробей с числителями, равными 1, знаменателями которых является число всех равновероятных вариантов, на которые распадается соответствующее достоверное событие. Однако сумму равных слагаемых обычно заменяют произведением. Это приводит нас к важному выводу.

Вероятность события равна дроби, знаменатель которой — число всех равновероятных исходов, а числитель — число тех из них, при которых это событие происходит.



Пример 3. В коробке лежат три черных и четыре белых бильярдных шара. Из нее наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар будет: а) черным; б) белым?

Решение. Когда из коробки вынимают один шар, им с равной вероятностью может оказаться любой из семи находящихся в ней шаров. Значит, есть всего 7 равновероятных возможностей вынуть шар из коробки. В трех из них вынутый шар окажется черным, поскольку в коробке 3 черных шара.

$$P_{\text{шар черный}} = \frac{3}{7}.$$

Аналогично находим вероятность вытащить белый шар.

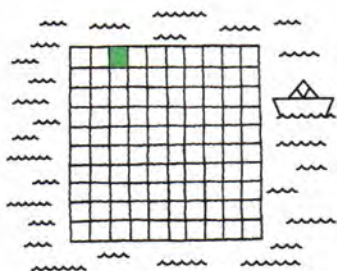
$$P_{\text{шар белый}} = \frac{4}{7}.$$

Упражнения

- 430.** Как вы думаете, является ли невозможным событием:
- 1) получение всеми учениками вашего класса отличных оценок за очередную контрольную работу по математике;
 - 2) получение всеми учениками вашего класса отличных оценок по математике за текущую четверть;
 - 3) замена всех завтрашних уроков просмотром приключенческого фильма?
- Объясните свой ответ.
- 431.** Приведите примеры событий, которые вы считаете:
- 1) достоверными;
 - 2) невозможными.

432. В колоде 36 карт. Из колоды наугад вынимается одна карта. Какое событие при этом является достоверным и из скольких равновероятных возможностей оно складывается? Чему равна вероятность осуществления каждой из этих возможностей?

433. В квадрате для игры в «Морской бой» ставится один одно-клеточный корабль. Какова вероятность с первой попытки в него попасть?



434. Для праздничной школьной лотереи изготовили 100 билетов. На каждый из них может выпасть один из 20 выигрышей. Какая вероятность выиграть, купив один билет этой лотереи?

435. В лотерее среди 1 млн билетов 300 тыс. выигрышных. Какова вероятность того, что купленный билет окажется выигрышным?

436. Вычисляя вероятность выпадения хотя бы одной решки при бросании двух монет, Саша рассуждал так: «Выпадение хотя бы одной решки складывается из двух возможностей — выпадение решки на первой монете и выпадение решки на второй монете. Вероятность выпадения решки для любой из монет равна $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. Значит, выпадение хотя бы одной решки — событие достоверное, т. е. как ни бросай две монеты, а хоть одна решка да выпадет!»

1) В каком месте своих рассуждений Саша допустил ошибку?

2) Как надо было рассуждать в данном случае и чему в действительности равна вероятность выпадения хотя бы одной решки?

437. Какова вероятность при игре в «Морской бой» первым же ходом попасть в один из кораблей противника?

438. Петя предложил Саше фору при игре в «Морской бой», сказав, что оставит себе единственный одноклеточный корабль, а другие его корабли Саша может считать затонувшими еще до сражения.

28. Число вариантов

В задачах на вычисление вероятности приходится находить как число всех возможностей, так и число тех из них, в которых интересующее нас событие произойдет. В несложных ситуациях, с которыми вы встретились в предыдущем пункте, все эти варианты можно было выписать и сосчитать. Часто, однако, такой подход оказывается слишком трудоемким. Так, например, когда бросают одну игральную кость, вариантов выпадения очков всего шесть, а если бросают две или три?

 **Пример 1.** Найти вероятность того, что при бросании двух игровых костей выпадет в сумме 4 очка.

Решение. Пусть одна из костей черная, а вторая белая. Будем искать число всех равновероятных возможностей. Выпишем их в виде таблицы с двумя входами.

Б \ Ч	1	2	3	4	5	6
1	1—1	1—2	1—3	1—4	1—5	1—6
2	2—1	2—2	2—3	2—4	2—5	2—6
3	3—1	3—2	3—3	3—4	3—5	3—6
4	4—1	4—2	4—3	4—4	4—5	4—6
5	5—1	5—2	5—3	5—4	5—5	5—6
6	6—1	6—2	6—3	6—4	6—5	6—6

В левом столбце таблицы указано число очков, которые могут выпасть на белой, а в верхней строке — на черной кости. В каждой внутренней клетке таблицы записан свой вариант выпадения очков. Число всех вариантов равно произведению числа вариантов выпадения очков на белой кости на число вариантов выпадения черной кости:

$$6 \cdot 6 = 36.$$

Отметим клетки таблицы, сумма очков в которых равна 4. Таких клеток три. Разделив это число на общее количество вариантов, получим искомую вероятность:

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

Каждый из вариантов, к которым может привести бросание двух костей, можно записать как двузначное число, первая цифра которого выбирается из шести возможных. Каждому из вариантов выбора первой цифры соответствует шесть возможностей выбрать вторую цифру числа, т. е. вторую цифру можно присоединить к первой шестью различными способами. Для вычисления общего числа вариантов пользуются *правилом произведения*.

Чтобы найти число вариантов выбора пары элементов, число способов выбора первого элемента умножают на число способов, которыми к первому элементу можно присоединить второй.

Правило произведения применяется и в тех случаях, когда выбор элементов осуществляется более двух раз.

 **Пример 2.** Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись?

Решение. Первой можно записать любую из данных пяти цифр. В каждом из этих пяти вариантов вторую цифру можно присоединить к первой четырьмя способами, так как одну из данных цифр уже использовали. По правилу произведения выбор первых двух цифр можно осуществить $5 \cdot 4$ способами. Каждому из них соответствует три варианта присоединения третьей цифры, значит, первые три цифры можно записать $5 \cdot 4 \cdot 3$ способами. Четвертой цифрой может оказаться любая из двух оставшихся, т. е. первые четыре цифры можно выбрать $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ способами. Выбор последней, пятой цифры предопределен выбором предшествующих, — когда из пяти цифр выбрали четыре, осталась единственная цифра. Всего получилось разных пятизначных чисел $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

Заметим, что каждое из этих чисел получается, например, из числа 12345 перестановкой его цифр.

Задачи, которые сводятся к перестановке элементов некоторого заданного набора, встречаются довольно часто. Комбинации, которые при этом получаются, так и называют *перестановками*. А число всех перестановок, состоящих из n различных элементов, обозначают P_n .

В нашей задаче $P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$.

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n$$

Для произведения первых n натуральных чисел в математике введено специальное обозначение:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n = n! \text{ (читается: эн факториал}^1\text{)}.$$

Отдельно определяется, что $1! = 1$.

С использованием факториала можно короче записать формулу числа перестановок из n элементов.

$$P_n = n!$$



Пример 3. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись?

Решение. Будем рассуждать так же, как и в примере 2.

Первой можно записать любую из данных семи цифр. Вторую цифру можно присоединить к первой шестью способами, так как после записи первой осталось шесть цифр. По правилу произведения выбор первых двух цифр можно осуществить $7 \cdot 6$ способами. Каждому из них соответствует пять вариантов присоединения третьей цифры, значит, первые три цифры можно записать $7 \cdot 6 \cdot 5$ способами. Четвертой цифрой может оказаться любая из четырех оставшихся, т. е. первые четыре цифры можно выбрать $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ способами. Последнюю, пятую цифру выбираем из оставшихся трех. Всего разных пятизначных чисел получилось $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2520$.

По сути дела, при записи пятизначного числа мы размещали по определенным местам 5 из 7 данных элементов. Полученные при этом комбинации элементов так и называют *размещениями*.

Число всех размещений из 7 различных элементов по 5 обозначают A_7^5 :

$$A_7^5 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot (2 \cdot 1)}{2 \cdot 1} = \frac{7!}{(7 - 5)!}.$$

¹ Слово «факториал» происходит от английского слова *factor* — «множитель».

Аналогично находят и число размещений из n по m .

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

З а м е ч а н и е. Размещение из n элементов по n является перестановкой этих n элементов, поэтому $A_n^n = P_n$. Однако при $m = n$ в знаменателе правой части формулы числа размещений получается выражение $0!$ Чтобы равенство $\frac{n!}{0!} = n!$ оставалось верным и в случае $m = n$, придется считать, что $0! = 1$.

Таким образом, определение *факториала* можно представить в виде системы.

$$n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n & \text{при } n = 2, 3, 4, \dots, \\ 1 & \text{при } n = 0 \text{ и } n = 1 \end{cases}$$

К решению задачи из примера 2 можно подойти иначе. Вместо того чтобы выбирать по одной цифре из 7, выберем сначала сразу все 5 цифр числа и будем затем их переставлять. Обозначим число вариантов, которыми можно выбрать 5 цифр из 7, как C_7^5 . Тогда каждому из этих вариантов соответствует P_5 перестановок выбранных цифр, а всего из данных 7 цифр можно будет составить $C_7^5 \cdot P_5$ пятизначных чисел. Как мы видели в примере 2, должно получиться число размещений из 7 по 5: $C_7^5 \cdot P_5 = A_7^5$. Отсюда получаем число вариантов выбора 5 элементов из 7:

$$C_7^5 = \frac{A_7^5}{P_5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{7 \cdot 6}{2} = 21.$$

Выбирая 5 цифр из 7 данных, мы обращали внимание не на порядок выбора, а только на сочетание цифр, т. е. на то, какие цифры выбирали. Результат такого выбора называют *сочетанием*.

Формула числа C_n^m сочетаний из n элементов по m

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$$

Подставив выражения для A_n^m и P_n , получим

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

✓ Пример 4. На плоскости отмечено 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

Решение. Любые три из данных пяти точек являются вершинами треугольника. Значит, нужно найти число вариантов выбора трех элементов из данных пяти. Поскольку порядок выбора не важен (например, $\triangle ABC$ и $\triangle BAC$ — это один и тот же треугольник), искомое число находим, как число сочетаний из 5 по 3:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 5 \cdot 2 = 10.$$

Ответ: 10 треугольников.

✓ Пример 5. Точка может двигаться по границам клеток только направо и вверх. Сколько существует разных маршрутов из левой нижней в правую верхнюю вершину прямоугольника (рис. 47)?

Решение. Будем обозначать сдвиг точки на одну клетку вправо буквой П, а на одну клетку вверх буквой В. Тогда каждый из возможных маршрутов можно записать с помощью пяти букв П и четырех букв В, так, например, на рисунке отмечен маршрут ППВПВВПВ.



Рис. 47

Любой из маршрутов можно определить, указав только, какие из 9 сдвигов точки являются, например, сдвигами вверх — остальные будут сдвигами вправо. Так, изображенный маршрут можно указать, сообщив номера сдвигов вверх: 3, 6, 5, 8. При этом важно не то, в каком порядке мы укажем номера сдвигов

вверх, а сами номера этих сдвигов. Значит, число разных маршрутов находится как число сочетаний:

$$C_9^4 = \frac{9!}{4! \cdot (9-4)!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 9 \cdot 2 \cdot 7 = 126.$$

Ответ: 126 маршрутов.

Комбинаторика — раздел математики, рассматривающий вопросы о том, сколько различных комбинаций можно составить из заданных объектов по тем или иным правилам. Комбинаторные задачи связаны с такими известными играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и др. Комбинаторика стала наукой в XVII в., когда возникла и теория вероятностей. Первые существенные шаги в разработке теории решения комбинаторных задач сделали французские ученые Блез Паскаль и Пьер Ферма. Не случайно, что для числа перестановок, числа размещений и числа сочетаний выбраны первые буквы французских слов *permutation* (перестановка), *arrangement* (размещение) и *combinaison* (сочетание). Комбинаторику как самостоятельную ветвь математики стал рассматривать знаменитый немецкий математик Г. Лейбниц, опубликовавший в 1666 г. книгу «Об искусстве комбинаторики».

Мы познакомились с тремя основными формулами комбинаторики, позволяющими находить число перестановок, размещений и сочетаний. Чтобы правильно выбрать формулу, нужно понять, важен или нет порядок выбора элементов, т. е. изменится ли комбинация, если элементы выбирать в другом порядке. Если порядок выбора важен, то речь идет о размещении, если нет, то о сочетании.

Упражнения

443. Найдите вероятность того, что число выпавших при бросании двух игральных костей очков:

- | | |
|--------------|--------------|
| 1) равно 3; | 4) больше 3; |
| 2) равно 10; | 5) четно; |
| 3) меньше 4; | 6) нечетно. |



444. Выпадение какой суммы очков наиболее вероятно при бросании двух игральных костей? Найдите вероятность выпадения этой суммы.

445. В меню есть четыре разных салата, три вида супов, четыре вида вторых блюд и пять различных напитков. Сколько разных вариантов обеда, состоящего из салата, супа, второго блюда и напитка можно заказать?

446. Из пункта A в пункт B ведут три дороги, а из пункта B в пункт C — четыре дороги. Сколько различных маршрутов, проходящих через B , ведет из пункта A в пункт C ?

447. 1) По правилу произведения найдите число членов в многочлене после раскрытия скобок, но до приведения подобных:

а) $(2x - 3x^2 + 4x^3)(x - 1)$;

б) $(12x^5 - 5x^3 + 7x^2 - 2x + 1)(3x^2 - 2x + 4)$.

2) Не приводя к многочлену стандартного вида, найдите коэффициенты его старшего члена и члена, содержащего x^3 .

448. 1) Сколько натуральных делителей, считая само число, имеет:

а) 8; б) 216; в) 1080; г) $q = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$,

где $p_1, p_2, \dots, p_m$ — различные простые числа, $k_1, k_2, \dots, k_m$ — некоторые натуральные числа (число 1 и само число включаются в число делителей)?

2) Что можно сказать о числах, которые имеют только:
а) 2; б) 3 натуральных делителя?

449. 1) Решите по правилу произведения задачи.

а) Сколькими способами можно составить список учеников вашего класса?

б) В забеге участвуют 6 спортсменов. Сколькими способами можно распределить их по шести беговым дорожкам стадиона?

2) Объясните, почему в данных задачах мы имеем дело с перестановками.

450. 1) Сколько различных четырехзначных чисел, цифры в которых не повторяются, можно составить из цифр 1, 2, 3 и 6?

2) Какова вероятность, что выбранное из этих четырехзначных чисел наугад число окажется:

а) нечетным;

в) кратным 4;

б) кратным 3;

г) кратным 5?

451. Сколько пятизначных чисел, цифры в которых не повторяются, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4?

452. Сколькими способами могли сесть музыканты из басни Крылова «Квартет»: проказница Мартышка, Осел, Козел да косолапый Мишка?

453. Сколько стран могут использовать для своего государственного флага три горизонтальные полосы одинаковой ширины и разных цветов: белого, красного и синего?

454. Найдите значение выражения:

- | | | |
|--------------------|---------------------------------|--|
| 1) $5!$; | 5) $\frac{6!}{5!}$; | 9) $\bigcirc \frac{7! + 6! + 5!}{8! - 7!}$; |
| 2) $3! + 4!$; | 6) $\frac{100!}{98!}$; | 10) $\bigcirc \frac{17! - 16 \cdot 16! - 15 \cdot 15!}{14!}$; |
| 3) $5! - 4!$; | 7) $\frac{6!}{4! \cdot 2!}$; | 11) $\bigcirc \frac{9! + 2 \cdot 9! + 3 \cdot 9!}{10!}$; |
| 4) $2! \cdot 4!$; | 8) $\frac{50!}{47! \cdot 3!}$; | 12) $\bigcirc \frac{101! \cdot 100 + 100! \cdot 101}{101! - 100!}$. |

455. Сравните значения выражений:

- | | |
|---|--|
| 1) $4!$ и $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$; | 4) $5! + 6!$ и $5! \cdot 8$; |
| 2) $4!$ и 5 ; | 5) $\frac{999!}{998!}$ и $\frac{1000!}{999!}$; |
| 3) $4! \cdot 3!$ и $5 \cdot 6$; | 6) $\frac{500!}{498! \cdot 12}$ и $\frac{500!}{499! \cdot 3!}$. |

456. Верно ли, что:

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| 1) $100! = 100 \cdot 99!$; | 4) $56!$ делится на 39; |
| 2) $6! = 2! \cdot 3!$; | 5) $10!$ делится на 11; |
| 3) $\frac{456!}{455!} = 456$; | 6) $9!$ оканчивается нулем? |

457. Делится ли $10!$ на: 1) 10^2 ; 2) 3^4 ; 3) $5^2 \cdot 7^2$; 4) 2^8 ?

458. Сколькими нулями оканчивается число: 1) $19!$; 2) $131!$?

459. Сократите дробь:

- | | |
|------------------------------|---|
| 1) $\frac{(n-2)!}{n!}$; | 3) $\bigcirc \frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$; |
| 2) $\frac{(k+1)!}{(k-1)!}$; | 4) $\bigcirc \frac{(3m)!}{2!(3m-2)!}$. |

460. Найдите натуральные корни уравнения, где n — натуральное число, большее 1:

1) $n! = 17(n-1)!;$

2) $(4n+10)! = 54(4n+9)!;$

3) $(n+2)! = 132n!;$

4) $(n+1)! = 990(n-2)!.$

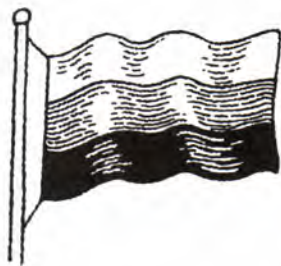
461. 1) Решите по правилу произведения задачи.

а) Четверо учеников сдают экзамен по математике. Сколько есть вариантов установить очередность вызова первых трех из них к экзаменатору?

б) Сколькими способами из 30 учеников класса можно выбрать старосту, ответственного за спорт и редактора стенгазеты, если это должны быть разные ученики?

2) Объясните, почему в данных задачах мы имеем дело с размещениями.

462. Сколько стран могут использовать для своего государственного флага три горизонтальные полосы одинаковой ширины и разных цветов: белого, красного, синего и желтого?



463. В списке учеников 7 класса 26 человек, из них 12 девочек, а остальные — мальчики.

1) Сколькими способами можно назначить трех дежурных: двух мальчиков и девочку?

2) Сколькими способами можно набрать в футбольную команду 11 мальчиков?

3) Решить задачу 2) при условии, что Петю Иванова обязательно следует включить в команду.

464. Из мешка для русского лото, в котором содержатся деревянные бочонки, помеченные числами от 1 до 99, вынимают по одному бочонку.

1) Сколько существует способов вытащить первый и второй бочонки так, чтобы сумма чисел на них оказалась равной 100? Какова вероятность этого события?

2) Какова вероятность, что на первом же вынутом бочонке будет простое число?

3) Какова вероятность, что число на первом же вынутом бочонке будет кратно 5?

465. 1) Решите задачи по формуле сочетаний.

- а) Сколькими способами читатель может выбрать 3 книги из 7 предложенных?
б) Сколько имеется вариантов назначения трех дежурных из 25 учеников класса?
2) Объясните, в чем особенность задач, которые решаются по формуле сочетаний.

466. 1) В шахматном турнире принимают участие 10 шахматистов. Сколько будет сыграно партий, если каждая пара участников играет между собой один раз?

2) На шахматном турнире, проводившемся в один круг (любые два участника встречались между собой один раз), было сыграно 10 партий. Сколько человек участвовало в турнире?

467. Вычислите: 1) C_{13}^2 ; 2) C_{50}^4 ; 3) $C_{12}^3 + C_{12}^4$; 4) $\frac{C_{16}^4}{C_{17}^4}$; 5) $\frac{C_{20}^4}{C_{19}^5}$.

468. Из 25 вопросов к экзамену Сергей выучил 20. Какова вероятность, что Сергей получит:

- 1) пятерку на экзамене, если в билете 3 вопроса;
- 2) четверку на экзамене, если четверку выставляют за 2 правильных ответа?

469. Решите уравнение:

$$1) C_x^2 = 21;$$

3) $C_x^4 = C_x^3;$

$$2) C_x^{x-2} = 6;$$

4) $C_x^3 = 19C_x^2.$

470. Каждую секунду точка M передвигается по координатной плоскости на 1 единицу вправо или на 1 единицу вверх, причем оба направления равновероятны. Стартует точка M из начала координат.

1) Найдите вероятность того, что через 5 с точка M окажется в точке: а) $A(0; 5)$; б) $B(4; 1)$.

2) Где с наибольшей вероятностью окажется точка M через 5 с? Чему эта вероятность равна?

3) С какой вероятностью точка M через 7 с попадет в точку:

a) $K(7; 0)$;

$$\text{B) } L(0; 7);$$

д) $F(5; 2);$

6) $N(1; 6)$;

$\Gamma) \bullet E(2; 5);$

e) $H(3; 4)$?

- 471.** В коробке лежат три черных и четыре белых бильярдных шара. Из нее наугад вынимают два шара. Какова вероятность, что:
- 1) оба шара окажутся черными;
 - 2) оба шара окажутся белыми;
 - 3) ● шары будут разного цвета?
- 472.** Коля, Саша, Алла и Маша должны сдавать зачет по математике. Учитель усаживает их по двое за первые две парты в левом ряду.
- 1) Найдите число возможных вариантов рассадки учеников.
 - 2) С какой вероятностью Коля и Саша окажутся за одной партой?
- 473.** Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если в каждом номере:
- 1) нет повторяющихся цифр;
 - 2) могут быть повторяющиеся цифры?
- 474.** В пятницу в 7 «А» классе 6 уроков по 6 различным предметам. Сколькими способами можно составить расписание уроков пятницы, если возможны уроки по 11 изучаемым предметам?
- 475.** Сколько существует:
- 1) двузначных чисел, записанных четными цифрами;
 - 2) трехзначных чисел, кратных 5;
 - 3) четырехзначных чисел, оканчивающихся нулем;
 - 4) ● пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?
- 476.** Сколько словарей необходимо переводчику, чтобы он мог переводить непосредственно с любого из четырех языков — русского, английского, немецкого и французского — на любой другой из этих языков?
- 477.** Сколько карточек игры «Лотто-миллион» нужно купить, чтобы на них оказались все комбинации по 6 номеров из 49 возможных?
- 478.** ● Сколько различных автомобильных номеров может быть выдано, если номер состоит из трех русских букв (начертание каждой из которых совпадает с начертанием любой из букв латинского алфавита) и 4 цифр?

479. Одна из клеток квадрата для игры в «Морской бой» окрашивается в красный, две — в зеленый и три — в синий цвета. Сколько при этом возможно комбинаций?
480. * Сколькими способами можно расставить два одноклеточных корабля в квадрате игры в «Морской бой»?



Контрольные вопросы и задания

1. Как связаны между собой число сочетаний и число размещений из n элементов по m ?
2. Из цифр 5, 6, 7 и 0 составлены все возможные трехзначные числа.
 - 1) Сколько всего чисел составлено?
 - 2) Сколько среди них четных чисел?
 - 3) Какова вероятность, что в наугад выбранном числе все цифры будут разными?

ПОВТОРЕНИЕ

29. Выражения

Слово «арифметика» происходит от греческого *arithmos*, что значит «число». С арифметики, науки о числе начинается знакомство с математикой. Один из первых русских учебников арифметики, написанный Л. Ф. Магницким в 1703 г., начинался словами: «Арифметика, или числительница, есть художество честное, независимое и всем удобопонятное, многополезнейшее и многохвальнейшее, от древнейших же и новейших, в разные времена живших изряднейших арифметиков, изобретенное и изложенное».

Уже на заре цивилизации людям приходилось считать. Вначале для счета использовали пальцы рук. Это привело к тому, что число 10 получило особое значение по сравнению с другими числами и легло в основу десятичной системы счисления, применяемой и в настоящее время. В Древнем мире существовали и другие системы счисления, например шестидесятеричная система в Вавилоне (около 2000 лет до н. э.). Элементы этой системы сохранились и поныне: при измерении времени мы пользуемся часами, минутами и секундами, где 1 ч равен 60 мин, а 1 мин — 60 с. Шестидесятеричной системой мы пользуемся и при измерении углов в геометрии.

С развитием производства и торговли понадобилось не только считать, но и записывать результаты счета и измерений. В Древнем Китае и Древнем Египте для обозначения чисел использовались специальные иероглифы, а в Греции и Риме — буквы алфавита. Римские числа записываются с помощью семи цифр: I, V, X, L, C, D, M, которые соответствуют числам 1, 5, 10, 50, 100, 500, 1000.

В начале нашей эры в Индии возникла значительно более удобная нумерация. Она была заимствована арабами и постепенно получила распространение благодаря сочинению знаменитого среднеазиатского ученого аль-Хорезми (IX в.), написавшего трактат «Книга об индийском счете», посвященный десятичной системе счисления. Аль-Хорезми подробно

разъяснил, как с помощью девяти цифр и маленького кружка, которым в то время обозначался нуль, записать любое число и как производить действия с числами, записанными по индийской системе.

Книга аль-Хорезми в XII в. была переведена на латинский язык, что способствовало быстрому распространению в Западной Европе десятичной системы счисления, названной арабской нумерацией.

Арабская нумерация является позиционной системой счисления. В ней значение цифры зависит от ее места в записи числа и меняется в 10 раз при перемещении на одно место. Например, в числе 2332 значения одинаковых цифр различны: $2332 = 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$.

В римской нумерации при записи чисел используется принцип сложения, если большая цифра стоит перед меньшей, или принцип вычитания, если меньшая цифра — перед большей. В этой нумерации затруднены и запись больших чисел, и выполнение арифметических действий.

При делении целого на несколько равных долей, при измерении длины и в ряде других случаев потребовалось расширить понятие числа, ввести дроби. Уже в Древнем Египте использовали дроби вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число, однако

только в Древней Греции стали рассматривать дроби вида $\frac{m}{n}$

и выполнять с ними арифметические действия. Десятичные дроби появились значительно позднее, чем обыкновенные. В XV в. знаменитый среднеазиатский ученый аль-Каши, долгое время работавший в Самарканде, широко использовал десятичные дроби в своих трудах по арифметике и астрономии. В Европе десятичные дроби впервые были введены в употребление нидерландским ученым Симоном Стевином в 1585 г., однако широкое распространение они получили только с начала XVII в.

Отрицательные числа использовались учеными Индии при решении уравнений уже в VII в. В Европе эти числа стали рассматриваться как равноправные с положительными числами только после работ Рене Декарта (1596—1650), давшего геометрическое истолкование отрицательных чисел на координатной оси.

Знаки действий «+» и «-» встречаются впервые в «Арифметике» чешского математика Яна Видмана в 80-х гг. XV в., а знак «×» для умножения применил английский математик

В. Оутред в начале XVII в. Точку для обозначения умножения и двоеточие для деления использовал в своих трудах знаменитый немецкий математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716).

Кроме двоеточия, в Англии и США до настоящего времени используется для обозначения деления знак « $\div$ ». Этот знак встречается и на некоторых калькуляторах.

Круглые скобки появились в XVI в. в трудах немецкого математика М. Штифеля, но широкое применение получили в XVII—XVIII вв. благодаря трудам Г. В. Лейбница и Леонарда Эйлера (1707—1783).

Упражнения

481. Найдите значение выражения:

- 1) $6,84 : 0,018 - 2,75 \cdot 120$;
- 2) $75,9 : 0,011 - 17,7 \cdot 320$;
- 3) $(91,273 : 45,5 - 1,406) : 0,12 - 4$;
- 4) $(11,065 - 89,664 : 12,8) : 20,3 + 0,8$.

482. Вычислите:

- 1) $\left(1\frac{5}{12} - \frac{29}{30}\right) \cdot 1\frac{13}{27} - \frac{1}{6}$;
- 2) $\frac{2}{5} + \frac{24}{25} : \left(\frac{7}{45} - 1\frac{1}{18}\right)$;
- 3) $\left(\frac{19}{42} - \frac{3}{35}\right) \cdot \left(1 - \frac{7}{22}\right)$;
- 4) $\left(\frac{17}{66} + \frac{7}{44}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} - 5\right)$;
- 5) $\left(\frac{11}{36} - \frac{5}{24}\right) \cdot 1\frac{1}{35} + 0,4$;
- 6) $\left(2\frac{11}{15} - 1\frac{19}{30}\right) \cdot 0,4 - 0,57$;
- 7) $0,43 + 0,3 \cdot \left(1\frac{5}{12} - \frac{9}{20}\right)$;
- 8) $\left(\frac{11}{35} - \frac{4}{21}\right) : 3\frac{7}{15} + \frac{3}{14}$;

$$9) \left(\frac{9}{45} - 0,24 \right) \cdot 4,5 - 0,82;$$

$$10) \left(\frac{2}{3} - 1,3 + \frac{3}{4} \right) : 1,4 + \frac{1}{6};$$

$$11) 0,3 + 0,029 : \left(\frac{6}{35} - 0,13 \right);$$

$$12) 2,6 - 0,038 : \left(\frac{12}{65} - 0,17 \right).$$

483. Упростите и вычислите:

$$1) \frac{2^8 \cdot 3^8}{6^5};$$

$$3) \frac{2^8 \cdot (7^2)^4}{14^4};$$

$$2) \frac{15^4}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 25};$$

$$4) \left(\frac{35}{48} \right)^3 \cdot \left(\frac{6}{7} \right)^3 \cdot \left(-1\frac{3}{5} \right)^2.$$

484. Сравните значения выражений:

$$1) \frac{3}{25} + \frac{7}{15} \text{ и } 1\frac{1}{18} - \frac{2}{27};$$

$$3) \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \text{ и } \frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{5}{6};$$

$$2) \frac{7}{24} + \frac{7}{32} \text{ и } 1\frac{11}{45} - \frac{25}{36};$$

$$4) \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \text{ и } \frac{3}{2} + \frac{5}{4} + \frac{7}{6}.$$

485. Не выполняя вычислений (пользуясь только прикидкой результата), сравните значения выражений:

$$1) 0,685 \cdot 1,24 \text{ и } 0,685 : 1,24;$$

$$2) 2,475 \cdot 0,105 \text{ и } 2,475 : 0,105;$$

$$3) 1,285 \cdot (-0,45) \text{ и } 1,285 : (-0,45);$$

$$4) 31,4 \cdot (-2,15) \text{ и } 31,4 : (-2,15);$$

$$5) 1,75 \text{ и } 1,75^2;$$

$$6) 0,815 \text{ и } 0,815^2;$$

$$7) -0,325 \text{ и } (-0,325)^2;$$

$$8) -1,45 \text{ и } (-1,45)^2.$$

486. Известно, что число a меньше числа b . Может ли быть верным утверждение:

$$1) |a| > |b|; \quad 2) |a| > b; \quad 3) a > |b|; \quad 4) |a| = |b|?$$

487. Найдите значение выражения:

$$1) \frac{n}{n-1} \text{ при } n = -\frac{1}{3};$$

$$2) \frac{a^2+1}{a-4} \text{ при } a = 3,5;$$

- 3) $\frac{ab-1}{(a+1)(b+1,6)}$ при $a=-1,5, b=3,2$;
 4) $\frac{(2c+3x)c}{x-c} - x$ при $c=1,2, x=1,3$.

488. Найдите значение выражения:

- 1) $\frac{2ab-bc}{a+b+c}$ при $a=\frac{1}{2}, b=\frac{1}{3}, c=-\frac{7}{12}$;
 2) $\frac{p-k(p+k)}{2p-k}$ при $p=1,5, k=0,5$;
 3) $\frac{a^2-4ab+3b^2}{3a-2b}$ при $a=-2\frac{1}{3}, b=-3$;
 4) $\frac{x^2-3xy+5y^2}{4y-x}$ при $x=-2, y=-0,2$;
 5) $\frac{a^3-b^3}{a^2+b(a+b)}$ при $a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{3}{5}$;
 6) $\frac{x^2-y(x-y)}{x^3+y^3}$ при $x=\frac{3}{4}, y=-\frac{2}{3}$.

489. 1) В России для определения нормы веса взрослого мужчины пользуются формулой: $P = H - 100$, где P — вес в килограммах, H — рост в сантиметрах. Какой вес является нормальным для мужчины ростом 170 см?

2) В США норма веса взрослого мужчины находится по формуле: $P = \frac{11}{2}H - 220$, где P — вес в фунтах, H — рост в дюймах. (Таблица перевода фунтов и дюймов помещена в разделе «Справочные материалы».) Какой вес является нормальным для взрослого американца с ростом 170 см?

Одинаковы ли нормы для жителей России и США?

490. Преобразуйте многочлен к виду, удобному для вычислений с помощью микрокалькулятора, и найдите его значение:

- 1) $a^3 - 17a^2 + 31a - 915$ при $a=23$;
 2) $b^3 + 14b^2 - 89b + 648$ при $b=-19$;
 3) $x^4 - 7x^3 - 26x^2 + 130x + 34$ при $x=8,4$;
 4) $y^4 + 57y^3 - 62y^2 - 91y - 18$ при $y=3,9$.

491. Составьте формулу для решения задачи.

1) Один рабочий изготовил n деталей за t ч, а другой — m деталей за T ч. Сколько деталей (A) изготовят оба рабочих за x ч совместной работы?

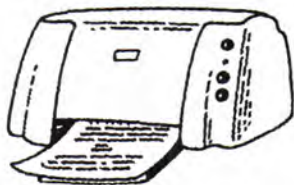
2) Через одну трубу в бассейн вливается V м³ воды за a ч, а через другую — W м³ за b ч. За сколько часов (x) обе трубы наполнят бассейн емкостью Q м³?

3) Один принтер (печатающее устройство компьютера) печатает n страниц в минуту, а другой — на 5 страниц больше. Сколько страниц можно напечатать с помощью этих двух принтеров за 1 ч?

4) Из пункта M в N со скоростью x км/ч выехал автомобиль. Спустя t ч навстречу автомобилю из N со скоростью y км/ч выехал мотоциклист. Мотоциклист встретил автомобиль на расстоянии d км от N . Найдите расстояние между пунктами M и N .

5) Пешеход отправился из пункта A со скоростью u км/ч, а спустя t ч вслед за ним со скоростью v км/ч отправился велосипедист. Через сколько часов (T) велосипедист догонит пешехода?

6) Из пунктов A и B , расстояние между которыми s (км), одновременно выехали навстречу друг другу два автомобиля со скоростями u км/ч и v км/ч. Через сколько часов (t) автомобили встретятся? Сколько километров (d) останется проехать второму автомобилю до пункта A , когда первый прибудет в пункт B ($u > v$)?



492. 1) Медный диск весит P Н. Сколько весит диск из алюминия, имеющий такой же объем? (Плотность меди и алюминия найдите в разделе «Справочные материалы».)

2) Объем стальной болванки равен V м³. Чему равен объем алюминиевой болванки, имеющей такую же массу? (Воспользуйтесь таблицей плотностей в разделе «Справочные материалы».)

493. Запишите в виде равенства, что:

- 1) произведение чисел a и b равно их удвоенной сумме;
- 2) частное чисел x и y на 1 больше их разности;

- 3) квадрат разности чисел b и c на 42 меньше суммы их квадратов;
- 4) квадрат разности чисел x и y на 71 меньше их удвоенного произведения;
- 5) квадрат суммы чисел p и q на 96 больше суммы их квадратов;
- 6) разность квадратов чисел c и d в 6 раз больше квадрата их разности;
- 7) $\bigcirc$ произведение трех последовательных натуральных чисел, большее из которых n , на 5 меньше суммы их квадратов;
- 8) $\bigcirc$ сумма четырех последовательных четных чисел в 5 раз больше меньшего из них, равного k .

494. $\bigcirc$ Даны дроби: $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$. Запишите, чему равна их:

- | | |
|--------------|------------------|
| 1) сумма; | 3) произведение; |
| 2) разность; | 4) частное. |

495. $\bigcirc$ Представьте число $a + \frac{b}{c}$, где a , b и c — натуральные числа, в виде обыкновенной дроби.

496. $\bullet$ 1) Сколько можно записать выражений, меняя порядок членов выражения:

- | | |
|-------------------|---------------|
| а) $a + b + c$; | в) abc ; |
| б) $-a + b - c$; | г) $a(-b)c$? |

2) Равны ли значения полученных выражений?

497. $\bullet$ Какой наибольший делитель у разности любых двух трехзначных чисел, записанных одними и теми же цифрами, но в обратном порядке?

498. Четным или нечетным будет число:

- 1) $(a + b)b$; 2) $a(a + b)$; 3) $a + 2b$; 4) $3a + b$, если:
- а) число a — четное, а число b — нечетное;
- б) числа a и b оба нечетные?

499. $\bullet$ На одной из египетских пирамид иероглифами написано наименьшее общее кратное всех целых чисел от 1 до 10. Найдите это число.

500. Великий русский математик П. Л. Чебышёв доказал, что между любым натуральным числом n (кроме 1) и удвоенным этим числом $2n$ всегда находится по меньшей

мере одно простое число. Например, между числами 2 и 4 находится простое число 3. Проверьте это свойство для всех натуральных чисел от 3 до 20.

- 501.** 1) Сколькими нулями оканчивается число $15!$?
2) Найдите частное и остаток от деления числа $10! + 64$ на 35.

30. Функции и графики

Идея координат возникла в древности. Уже в Древнем Египте при копировании изображений использовали прямоугольную сетку (палетку).

Координатный метод был разработан независимо друг от друга выдающимися французскими математиками XVII в. Пьером Ферма и Рене Декартом. Он был впервые подробно изложен в труде Декарта «Геометрия» и стал основой одного из разделов математики, называемого *аналитической геометрией*.

Термины «абсцисса», «ордината», «координаты» были введены в 80-х гг. XVII в. Г. В. Лейбницем.

Идея функции возникла вместе с понятием переменной. Вначале понятие функции было тесно связано с геометрическими и физическими представлениями. Рассматривая x и y в уравнении как переменные, Р. Декарт исследовал изменение ординаты точки, описывающей некоторую линию, в зависимости от изменения абсциссы этой точки, т. е. рассматривал y как функцию x .

Великий английский физик и математик Исаак Ньютон (1643—1727) изучал изменение различных физических величин в зависимости от времени.

Понятие функции лежит в основе математического анализа — одного из важнейших разделов математики, начало которому положили труды П. Ферма, Г. Лейбница и И. Ньютона.

До XIX в. в математике рассматривались только функции, заданные формулами. В XIX в. функцию стали считать заданной, если каждому допустимому значению x соответствует определенное значение y , причем не важно, каким способом: формулой, графиком или словесным описанием — задается это соответствие. Так понимал функцию знаменитый русский математик Николай Иванович Лобачевский (1792—1856).

Термин «функция» от латинского слова *functio*, означающего «выполнение, осуществление», ввел в употребление Г. В. Лейбниц в конце XVII в.

Современное обозначение $f(x)$ ввел Л. Эйлер, объяснявший, что функция — это то, что можно «вычертить карандашом на листе бумаги».

Упражнения

- 502.** На координатной прямой (рис. 48) отмечены точки $A(k)$ и $B(n)$, соответствующие числам k и n . Какое из чисел больше — k или n ? Какое из этих чисел имеет больший модуль?



Рис. 48

- 503.** На координатной прямой (рис. 49, а) не указано начало отсчета. Можно ли установить:

- 1) какое из чисел больше — a или b ;
- 2) какое из этих чисел имеет больший модуль?



Рис. 49

- 504.** Какие координаты будут иметь точки $A(-5)$, $B(-2)$, $C(0)$, $D(4)$, $T(8)$, $f(x)$, если начало отсчета перенести в точку: 1) K ; 2) M (рис. 49, б)?

- 505.** Начало отсчета на координатной прямой перенесли в точку $A(10)$.

- 1) Как изменились при этом координаты всех точек этой прямой?
- 2) Как изменились при этом модули:
 - а) отрицательных чисел; б) чисел, больших 10?
- 3) Существует ли число, модуль которого не изменился?

506. Рассмотрите рисунок 50 и сделайте вывод о знаках чисел p и q .

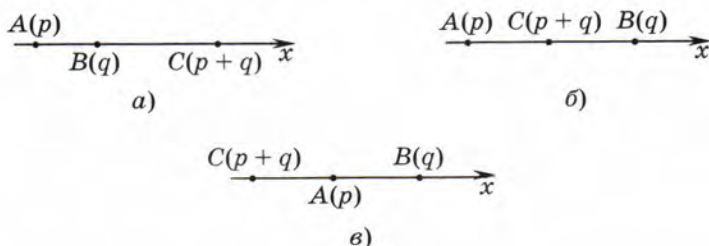


Рис. 50

507. 1) На рисунке 51 укажите примерное расположение точек: а) $B(n^2)$; б) $C(n^3)$; в) $D\left(\frac{1}{n}\right)$.

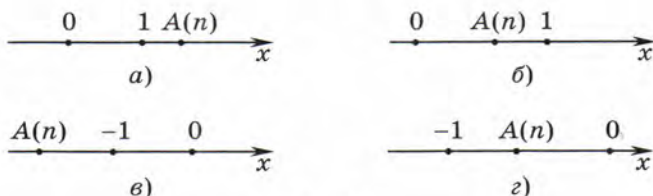


Рис. 51

- 2) На рисунке 52 укажите примерное расположение точек: а) $C(1)$; б) $D\left(\frac{1}{n}\right)$; в) $E(n^3)$.

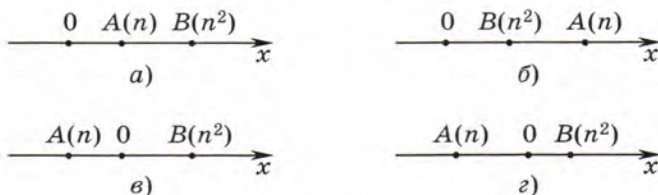


Рис. 52

508. 1) Постройте треугольник ABC по координатам его вершин: $A(-5; 3)$, $B(1; 7)$, $C(3; -1)$. Какие координаты имеют вершины треугольника $A_1B_1C_1$, симметричного данному относительно:
 а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат?

- 2) Постройте треугольник KMN по координатам его вершин: $K(-6; 0)$, $M(0; 4)$, $N(2; 8)$. Какие координаты имеют вершины треугольника $K_1M_1N_1$, симметричного данному относительно:
- а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) начала координат?
509. 1) Прямоугольник $ABCD$ задан координатами трех вершин: $A(-2; 9)$, $B(8; 9)$, $C(8; -3)$. Найдите координаты вершины D и площадь прямоугольника.
- 2) Квадрат $ABCD$ задан координатами двух вершин $A(-3; 1)$ и $B(-3; 7)$. Найдите координаты остальных вершин квадрата. Сколько решений имеет задача?
510. Сторона квадрата $ABCD$ параллельна оси абсцисс и равна 5. Зная координаты вершины $A(4; -2)$, укажите координаты трех других его вершин, если:
- 1) все вершины квадрата расположены в одной и той же четверти;
 - 2) вершины квадрата находятся во всех координатных четвертях.
511. 1) Через точку $M(3; 0)$ проведите прямую, параллельную оси ординат. Найдите координаты нескольких точек этой прямой. В чем особенность координат этих точек? Есть ли хотя бы одна точка координатной плоскости, не принадлежащая этой прямой, обладающая тем же свойством?
- 2) Что представляет собой множество точек, имеющих:
- а) ординату, равную 4;
 - б) абсциссу, равную 5;
 - в) абсциссу, равную нулю;
 - г) ординату, равную нулю;
 - д) положительные абсциссы;
 - е) отрицательные ординаты;
 - ж) отрицательные абсциссы и положительные ординаты;
 - з) равные абсциссы и ординаты?
512. Что представляет собой множество точек координатной плоскости, у которых:
- 1) $x > 3$;
 - 2) $y > -4$;
 - 3) $|x| > 1$;
 - 4) $|x| < 1$;
 - 5) $|y| > 2$;
 - 6) $|y| \leq 2$?

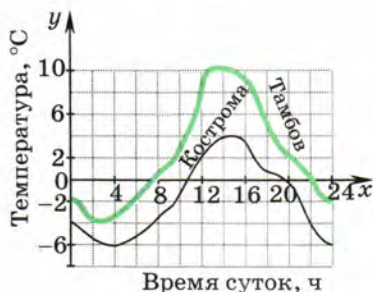


Рис. 53



Рис. 54

513. На рисунке 53 изображены графики температуры воздуха в течение одних и тех же суток в Тамбове и Костроме. Найдите по этим графикам:

- 1) какая температура воздуха была в Тамбове: в 2 ч; в 7 ч; в 13 ч;
- 2) какая температура воздуха была в Костроме: в 3 ч; в 11 ч; в 17 ч;
- 3) в котором часу в Тамбове была температура: -1°C ; $+3^{\circ}\text{C}$; $+7^{\circ}\text{C}$;
- 4) в котором часу в Костроме была температура: -3°C ; $+1^{\circ}\text{C}$; $+3^{\circ}\text{C}$;
- 5) в течение какого промежутка времени температура воздуха в Тамбове:
 - а) повышалась; б) понижалась; в) была выше нуля;
- 6) в течение какого промежутка времени температура воздуха в Костроме:
 - а) повышалась; б) понижалась; в) была ниже нуля;
- 7) какая температура воздуха была в Тамбове, когда в Костроме было $+2^{\circ}\text{C}$;
- 8) какая температура воздуха была в Костроме, когда в Тамбове было $+8^{\circ}\text{C}$;
- 9) каков суточный ход температуры (разность наибольшей и наименьшей температур) в каждом городе;
- 10) каков промежуток времени, в течение которого температура воздуха в обоих городах была:
 - а) выше нуля; б) выше $+2^{\circ}\text{C}$; в) ниже $+2^{\circ}\text{C}$.

514. На рисунке 54 изображены графики температуры воздуха в течение одних и тех же суток в Москве и Архангельске. Найдите по графикам:

- 1) какая температура была в Москве (Архангельске): в 4 ч; в 15 ч;

- 2) в котором часу в Москве (Архангельске) было: -2°C ; $+3^{\circ}\text{C}$; $+5^{\circ}\text{C}$;
- 3) в течение какого промежутка времени температура повышалась:
 - а) в Москве; б) в Архангельске; в) в обоих городах;
- 4) в течение какого промежутка времени температура в обоих городах была: а) выше нуля; б) выше $+2^{\circ}\text{C}$;
- 5) какая температура была в Москве, когда в Архангельске было -3°C ;
- 6) какая температура была в Архангельске, когда в Москве было $+5^{\circ}\text{C}$;
- 7) каков суточный ход температуры (разность наибольшей и наименьшей температур) в каждом из городов;
- 8) в какие моменты времени температура воздуха в обоих городах достигала своего наибольшего значения;
- 9) найдите среднюю температуру воздуха за сутки в каждом городе, определяя по графикам температуру через каждый час от 0 ч 30 мин до 23 ч 30 мин.

515. На рисунке 55 изображены графики зависимости высоты высаженных одновременно сосны и березы от их возраста. Определите:

- 1) какова была высота каждого дерева в возрасте:
 - а) 20 лет; б) 45 лет; в) 70 лет;
- 2) в каком возрасте каждое из деревьев достигло высоты:
 - а) 5 м; б) 12 м; в) 20 м; г) 25 м;
- 3) на сколько метров выросло каждое дерево: а) за первые 15 лет своей жизни; б) за следующие 15 лет; в) за период от 30 до 45 лет; г) за период от 45 до 60 лет; д) за период от 60 до 75 лет; е) за период от 75 до 90 лет;
- 4) в каком возрасте деревья имели одинаковую высоту;
- 5) в каком возрасте сосна имела ту же высоту, что и береза в 80 лет;
- 6) в каком возрасте береза имела ту же высоту, что и сосна в 35 лет;
- 7) на сколько метров выше березы была сосна в возрасте 90 лет;
- 8) в каком возрасте сосна была на 5 м выше березы.

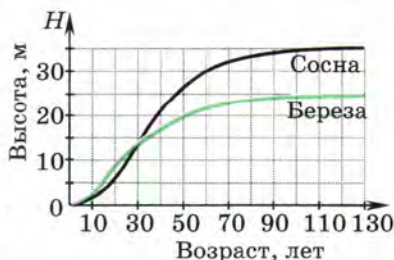


Рис. 55

516. Используя данные таблицы, постройте график зависимости высоты осины от ее возраста.

Возраст, лет	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
Высота, м	2	4	5,5	8,5	13	16	18	20	21,5	23	24,5	26

517. Для определения количества жидкости, находящейся в цистерне, размеры которой указаны на рисунке 56, достаточно измерить высоту столба жидкости (h) и воспользоваться изображенным на рисунке графиком. Найдите, используя график:

1) сколько гектолитров жидкости в цистерне, если высота столба жидкости равна:

- а) 15 см; в) 40 см; д) 130 см;
б) 25 см; г) 70 см;

2) какова будет высота столба жидкости в цистерне, если в нее налить:

- а) 80 гл; б) 140 гл.

Являются ли переменные h и t прямо пропорциональными?

518. Известно, что чем выше находится наблюдатель над поверхностью земли, тем больше видимое им расстояние (расстояние до горизонта). Зависимость между высотой h (м) точки над поверхностью земли и расстоянием до горизонта d (км) дана на графике (рис. 57). Определите по графику:

1) как далеко видно с высоты:

- а) 10 м; б) 50 м; в) 100 м; г) 200 м;

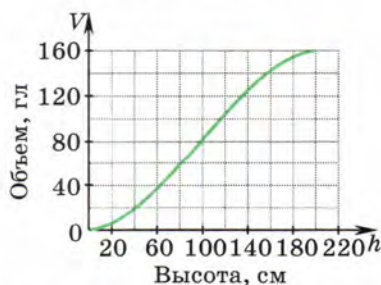
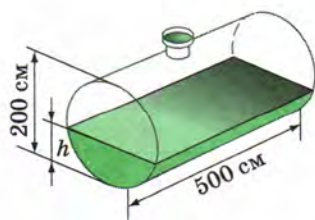


Рис. 56

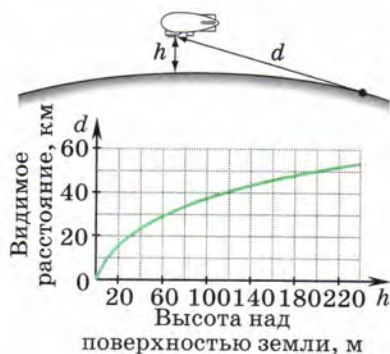


Рис. 57

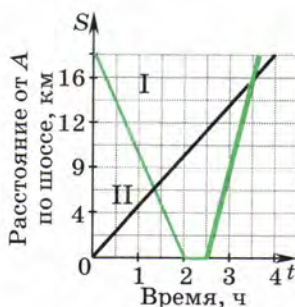


Рис. 58

2) на какой высоте должен находиться наблюдатель, чтобы видимое расстояние равнялось:

а) 20 км; б) 30 км; в) 40 км; г) 50 км.

3) Используя график, заполните таблицу.

h , м	10	20	30	50	80	100	120	160	200	220
d , км										

519. Из пунктов A и B одновременно отправляются навстречу друг другу по шоссе пешеход и велосипедист. На рисунке 58 изображены графики движения велосипедиста (I) и пешехода (II). Найдите с помощью графиков:

1) сколько километров прошел пешеход:

а) за первые полтора часа пути;

б) за следующие полтора часа пути;

2) сколько километров проехал велосипедист:

а) за полтора часа пути; б) за три часа, прошедшие после его отправления из пункта B ;

3) сколько времени затратил на весь маршрут:

а) пешеход; б) велосипедист;

4) на каком расстоянии от пункта A велосипедист:

а) встретил пешехода;

б) обогнал пешехода, возвращаясь в пункт B ;

5) сколько километров осталось пешеходу до пункта B , когда велосипедист вернулся в пункт B .



Рис. 59

520. При постройке на реке мостов, плотин и других сооружений определяют профиль поперечного сечения реки. На рисунке 59 изображен такой профиль, полученный в результате промера глубины реки через каждый метр. Определите:

- 1) какую глубину имеет река на расстоянии: 5 м, 8 м, 11 м от левого берега;
- 2) какова наибольшая глубина реки в месте промера;
- 3) используя принцип палетки, какова площадь поперечного сечения реки.

521. Парусная лодка отошла от причала A и через некоторое время подошла к причалу B , находящемуся на другом берегу реки. На рисунке 60 показана траектория движения лодки и дан график зависимости расстояния лодки до причала A от времени ее движения. Найдите по графику:

- 1) на каком расстоянии от причала A находилась лодка через:

а) 3 мин;	в) 9 мин;
б) 6 мин;	г) 16 мин после отправления;
- 2) через сколько минут после отправления лодка находилась от A на расстоянии:
- а) 300 м; б) 600 м; в) 900 м; г) 1100 м;
- 3) каково было наибольшее расстояние от лодки до причала A ;
- 4) на каком расстоянии от причала A находится причал B .
- 5) Означает ли горизонтальный участок графика, что лодка находилась на одном и том же месте?

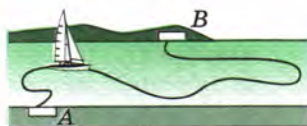
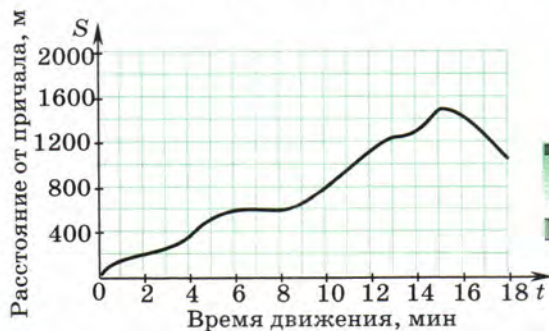


Рис. 60

- 522.** От причала в учебный рейс по озеру отошла яхта, а через некоторое время от того же причала отправился катер. На рисунке 61 изображены графики зависимостей:
- между расстоянием от яхты до причала и временем ее движения;
 - между расстоянием от катера до причала и временем его движения.

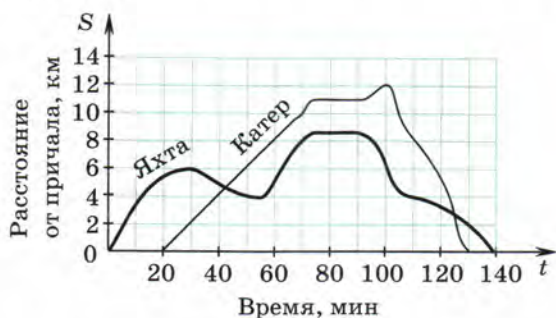


Рис. 61

Определите:

- на каком расстоянии от причала была яхта через: 20 мин; 30 мин; 70 мин; 100 мин после отправления;
- на каком расстоянии от причала находился катер через: 30 мин; 90 мин после своего отправления;
- каковы промежутки времени, в которые расстояние от яхты (катера) до причала: а) увеличивалось; б) уменьшалось; в) оставалось неизменным;
- через сколько минут после отправления катера он находился от пристани на том же расстоянии, что и яхта;
- каково было наибольшее удаление яхты (катера) от причала;
- на каком расстоянии от причала находилась яхта, когда катер от причала был на расстоянии: в 1 км; в 10 км;
- сколько времени яхта находилась от причала далее чем в 7 км;
- на каком расстоянии была яхта от причала, когда катер от него находился на наибольшем удалении;
- можно ли по графикам установить: останавливались ли яхта и катер; каково было расстояние между яхтой и катером в какие-то моменты движения.

523. На тренировке в 50-метровом бассейне два пловца стартовали одновременно на дистанции 200 м. Один плыл кролем, другой — брассом. На рисунке 62 даны графики движения пловцов.

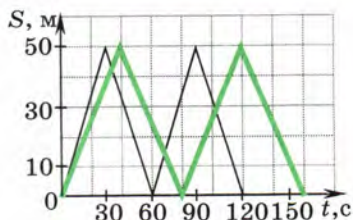


Рис. 62

Определите:

- 1) сколько времени затратил каждый пловец на каждые 50 м и на всю дистанцию;
- 2) сколько раз и на каком расстоянии от стартовой стенки бассейна встречались пловцы;
- 3) с какой скоростью плыл каждый из спортсменов;
- 4) на сколько метров обогнал первый пловец второго к моменту своего финиша;
- 5) сколько секунд плыл второй спортсмен после того, как первый финишировал.

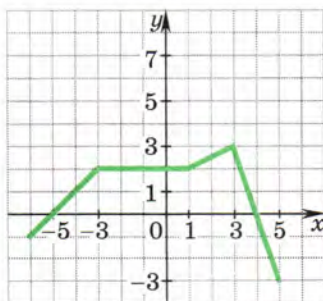
524. Составьте таблицы с шагом 0,5 значений функций, графики которых изображены на рисунке 63.

525. 1) Функция $y = f(x)$ задана формулой $f(x) = x^2 + 3x$. Найдите:

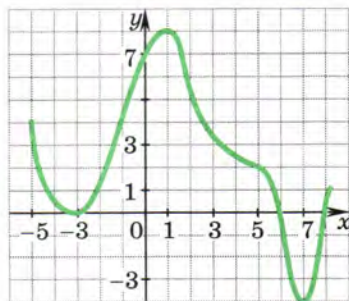
- а) $f(-4)$; б) $f(1)$; в) $f(0,5)$; г) $f(-1,5)$.

2) Функция $f(x)$ задана формулой $f(x) = 5x - x^2$. Найдите:

- а) $f(-2)$; б) $f(1)$; в) $f(0,1)$; г) $f(-0,6)$.



а)



б)

Рис. 63

526. При каких значениях x значение функции:

1) $y = \frac{5x-2}{7}$ равно 9;

3) $y = \frac{3x-1}{2x+1}$ равно 1,5;

2) $y = \frac{73-4x}{5}$ равно 15;

4) $y = \frac{5x-2}{2x+5}$ равно 2,4?

527. Прямая $y = kx + l$ пересекает оси координат в точках:

1) $A(0; 8)$ и $B(5; 0)$;

2) $K(0; -6)$ и $M(7; 0)$.

Найдите k и l .

528. Прямая $y = kx + l$ проходит через точки:

1) $A(0; 2)$ и $B(3; 5)$;

3) $C(4; 4)$ и $D(-3; -3)$;

2) $K(-2; 3)$ и $M(-3; 2)$;

4) $P(5; 6)$ и $Q(-4; 3)$.

Найдите k и l .

529. Найдите k и l , зная, что прямая $y = kx + l$ проходит через точку $C(2; 1)$ и:

1) параллельна прямой $y = 3x - 1$;

2) перпендикулярна прямой $y = 3x - 1$.

530. Определите k и l линейных функций $y = kx + l$, графики которых изображены на рисунке 64.

531. Постройте график функции:

1) $y = \frac{1}{3}x - 4$;

2) $y = -\frac{2}{3}x + 6$.

532. 1) Постройте график функции:

а) $y = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$;

б) $y = \frac{4x^2 - 12x + 9}{2x - 3}$;

в) $y = (x^2 - 1)\left(\frac{3}{x - 1}\right) - x$;

г) $y = (x^2 - 2x + 1)\left(\frac{2}{x - 1}\right) + 3$.

2) Найдите координаты точек пересечения графика с осями координат.

533. Постройте график уравнения:

а) $y + 2x - 3 = 0$;

в) $(y - 3x - 1)(y + x - 2) = 0$;

б) $2y - 3x + 3 = 0$;

г) $(y + x + 2)(x^2 - 1) = 0$.

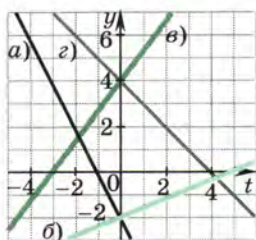


Рис. 64

534. Имеет ли решения система уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 3x + 4y = -2; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 5x - y = 8, \\ 10x - 2y = 9? \end{cases}$$

535. Решите графически систему уравнений:

$$1) \begin{cases} 2x - y = 5, \\ x + 2y = 20; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 5x - 2y = 2, \\ 4x - y = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} -x + 3y = 2, \\ 2x + y = 10; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 3x + 2y = 14, \\ x + y = 6. \end{cases}$$

31. Тождества

Древневавилонские клинописные тексты свидетельствуют о том, что формулы сокращенного умножения были известны уже около 4000 лет назад. Вавилоняне запоминали их в словесном виде, а древние греки в геометрической форме.

Ученые Древней Греции в VI в. до н. э. представляли числа отрезками. Вместо сложения двух чисел говорили о сложении отрезков, вместо слов «произведение ab » говорили «прямоугольник, содержащийся между отрезками a и b », произведение трех чисел воспринималось как объем прямоугольного параллелепипеда. С того времени и используются термины «квадрат числа» (т. е. произведение величины на самое себя) и «куб числа». Таким образом, в Древней Греции в основном развивалась геометрическая алгебра. Алгебраические тождества истолковывались с помощью чертежей. Например, формулы сокращенного умножения $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ и $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ разъяснялись рисунками (рис. 65).

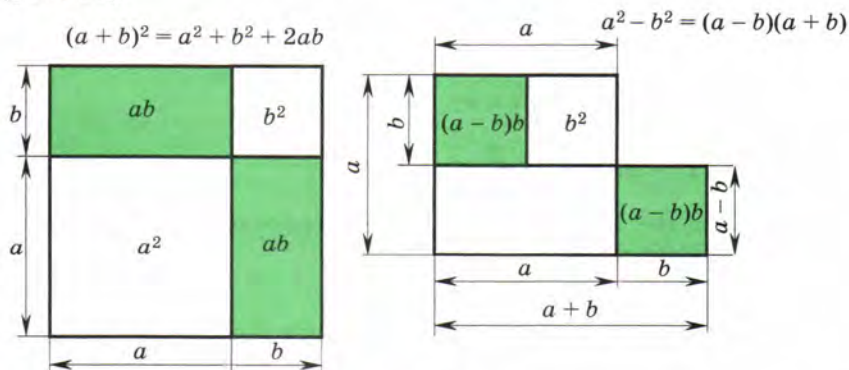


Рис. 65

Отход от геометрической трактовки наметился у Диофанта Александрийского (III в.). В его книге «Арифметика» появились зачатки буквенной символики. В книге «Начала» Евклида еще содержатся некоторые тождества, доказанные геометрическим способом. Алгебру, работающую с отрезками, называли в XIX в. геометрической алгеброй.

При различных преобразованиях многочлена пользуются скобками, но так было не всегда. Знаки, влияющие на порядок действий в выражениях, появились в XV в. Французский математик Никола Шюке в сочинении «Наука о числах в трех частях» (1484) вместо скобок использовал подчеркивание многочленов горизонтальной чертой. Круглые скобки появились в XVI в. в трудах Штифеля, Тартальи и др. Однако до конца XVII в. математики чаще использовали горизонтальную черту над выражением, которое мы бы сегодня заключили в скобки. Широкое применение круглые скобки получили благодаря Лейбницу и Эйлеру в первой половине XVIII в. Само название произошло от введенного Эйлером немецкого термина *klammer* — «скобки».

Упражнения

536. Представьте в виде одночлена стандартного вида:

$$1) (-5a^3b^2)^3 \cdot 0,04ab^2; \quad 3) (-4x^4y)^4 \cdot (-0,125x^2y^5);$$

$$2) \bigcirc (-6a^3x^2)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3}a^2x^2\right)^2; \quad 4) \bigcirc \left(-\frac{1}{2}x^2n\right)^4 (-4k^3n^5)^2.$$

537. Вставьте пропущенные одночлены так, чтобы получилось тождество:

$$1) (\dots)^2(\dots)^3 = -64x^5y^6z^7;$$

$$2) (\dots)^2(\dots)^3 = -125a^4b^9c^{11};$$

$$3) (\dots)^2(\dots)^3 = 1000k^5n^8m^{13};$$

$$4) (\dots)^2(\dots)^3 = -36c^7n^{11}p^9.$$

538. Представьте выражение в стандартном для многочлена виде:

$$1) (x+1)(x+2)(x+3);$$

$$3) (a+2)^2(a-4);$$

$$2) (y-1)(y-2)(y-3);$$

$$4) (b-6)^2(2b-3).$$

539. Преобразуйте в многочлен стандартного вида:

$$1) (3a-2x)^2(4a+x) - a(4(3a-x)^2 - 15ax);$$

$$2) (5a+3b)^2(4a-b) - b(96a^2 - (3b-a)^2);$$

- 3) $(n + 5k)^2(n - k) + (n - 5k)^2(n + k) - 2n(n + 4k)(n - 4k);$
 4) $(a + 3x)^2(a - x) - (a - 3x)^2(a + x) - 2x(2a + 3x)(2a - 3x).$

540. Разложите на множители:

- 1) $20a^2 - 45b^2;$ 7) $5a^2 + 10a^2 - 6b - 3ab;$
 2) $75b^2 - 48c^2;$ 8) $8xy^3 - 24y^2 - 7axy + 21a;$
 3) $3x^2y - 27xy^2;$ 9) $(7a - 3b)^2 - 16b^2;$
 4) $1024a^3 + 64a;$ 10) $25x^2 - (3x + 8y)^2;$
 5) $a^2 - ab - 8a + 8b;$ 11) $(a - 1)^3 - (a - 1)(3a + 1);$
 6) $x^2 - ax - a^2y - axy;$ 12) $(x + 2)(x + 4) - (x + 2)^3.$

541. 1) Докажите, что $(10n + 5)^2 = n \cdot (n + 1) \cdot 100 + 25.$

2) На основании этого тождества сформулируйте правило возведения в квадрат чисел, оканчивающихся цифрой 5.

3) Вычислите устно: а) $75^2;$ б) $895^2;$ в) $8995^2;$ г) $9995^2.$

542. Разложите на множители:

- 1) $3a^2 - a - b - 3b^2;$
 2) $5x^2 + 2x + 2y - 5y^2;$
 3) $a^3 + a - 5b - 25b^2;$
 4) $4x^2 - 2x + 3y - 9y^2;$
 5) $4(6a - 5b)^2 - 36a^2 + 25b^2;$
 6) $(2x + 3y)^2 - 20x^2 + 45y^2;$
 7) $a^2 + 2ab + b^2 - 81c^2;$
 8) $x^2 - 2xy + y^2 - 100z^2;$
 9) $(ax - by)^2 - (bx - ay)^2;$
 10) $a^2(a - y)^2 - b^2(b - y)^2;$
 11) $4(ay + bx)^2 - (a^2 - b^2 - x^2 - y^2)^2;$
 12) $(c^2 - b^2 + d^2 - a^2)^2 - 4(ab - cd)^2.$

543. При каких значениях k можно преобразовать в квадрат двучлена выражение:

- 1) $9a^2 + 49b^2 + kab;$
 2) $36x^2 - 60xy + ky^2;$
 3) $(3x + 8)^2 + (6x - 1)^2 + (2x + 4)^2 + kx;$
 4) $(4a - 7)^2 + (3a - 24)^2 + (12a - 15)(12a + 15) + ka?$

544. Сократите дробь:

1) $\frac{15a^4b^7}{51a^7b^4}$;

2) $\frac{132x^5y^6}{231x^6y^5}$;

3) $\frac{5a - 10b}{a^2 - 4b^2}$;

4) $\frac{9x^2 - y^2}{9x - 3y}$;

5) $\frac{(7a - 7b)^2}{7a^2 - 7b^2}$;

6) $\frac{10b^2 - 10a^2}{(10c - 10b)^2}$;

7) $\frac{a^2 - 9}{ax - 3x + 2a - 6}$;

8) $\frac{by + 4y - 5b - 20}{y^2 - 25}$.

545. Сократите дробь:

1) $\frac{a^2 - 4a + 4}{(a + 5)^2 - 49}$;

2) $\frac{9 - (b + 2)^2}{b^2 + 10b + 25}$;

3) $\frac{x^2 - 5y + 5x - y^2}{x^2 + 5y - 5x - y^2}$;

4) $\frac{a^2 + bc - b^2 - ac}{ab - c^2 + ac + b^2}$;

5) $\frac{a^2 - ac - b^2 + bc}{a^2 - b^2 + 2bc - c^2}$;

6) $\frac{x^2 - y^2 - 2yz - z^2}{x^2 + xz - y^2 - yz}$.

546. Докажите, что:

- 1) если натуральное число не делится на 3, то разность его квадрата и единицы делится на 3;
- 2) разность квадратов двух нечетных чисел делится на 8;
- 3) произведение квадрата натурального числа и числа, предшествующего этому квадрату, делится на 12;
- 4) если n — простое число, большее, чем 3, то $n^2 - 1$ делится на 24;
- 5) сумма квадратов трех последовательных натуральных чисел не делится на 3;
- 6) сумма квадратов пяти последовательных натуральных чисел делится на 5, но не делится на 20.

547. На языке геометрической алгебры говорили, что площадь квадрата, построенного на сумме двух отрезков, равна сумме площадей квадратов, построенных на этих отрезках, увеличенной на удвоенную площадь прямоугольника, построенного на этих отрезках. Сделайте рисунок к данному утверждению. О какой формуле сокращенного умножения идет речь?

548. Задача из «Арифметики» таджикского ученого X—XI вв. Ибн Сины. Если число, будучи разделено на 9, дает в остатке 1 или 8, то квадрат этого числа, деленный на 9, дает в остатке 1. Докажите это свойство.

549. Сергей предложил своему другу Алексею задумать четное число и умножить его на 3, половину полученного произведения умножить снова на 3. «Сколько девяток надо сложить, чтобы получить этот же результат?» — спросил Сергей. «Восемь девяток», — ответил Алексей. «Значит, задуманное число 16», — отгадал Сергей. Объясните способ отгадывания числа.

550. Объясните способ отгадывания числа.

Задуманы четыре однозначных числа. Умножьте первое из них на 2 и прибавьте 5, результат умножьте на 5 и прибавьте 10 и второе число; полученный результат умножьте на 10 и прибавьте третье число; новый результат умножьте на 10 и прибавьте четвертое число. Из последнего результата нужно вычесть 3500, тогда полученная разность есть число, составленное из четырех цифр, обозначающих по порядку задуманные числа.

1) Проверьте данное утверждение на конкретных числах.

2) Докажите данное утверждение для произвольных однозначных чисел.

551. 1) Даны три последовательных натуральных числа. Если к разности квадратов наибольшего и наименьшего из них прибавить среднее число, то получится 45. Найдите эти числа.

2) Даны два последовательных натуральных числа. Когда из удвоенной суммы их квадратов вычли квадрат их суммы и прибавили утроенное меньшее из чисел, то получилось 22. Найдите эти числа.

552. 1) Определите степень многочлена:

а) $(5 - 7x^3)^2$;

б) $(x + 2)^2 - (x + 1)^2(3 - x)^2$;

в) $(2x + 1)^3 + (3x^3 - 2)^2$;

г) $(x^2 + 2)^3 - (x - 2)^2(3 - x)^2 + (7 - 5x)(7 + 5x)$.

2) Найдите коэффициент при старшем члене многочлена.

553. Для какого натурального значения p число $p^2 - 1$ — простое?

32. Уравнения и системы уравнений

Решать линейные уравнения в Древнем Египте умели уже во II тысячелетии до н. э. Примерно в то же время решать системы уравнений с двумя неизвестными научились в Древнем Вавилоне. И в Вавилоне, и в Древнем Египте уже использовали для неизвестных специальные обозначения. Египтяне обозначали неизвестное в уравнении иероглифом, называвшимся «хау», что значит «куча» или «количество».

В IX в. узбекский математик и астроном Мухаммед ал-Хорезми в своем трактате «Китаб аль-джебр валь-мукабала» («Краткая книга об исчислении алгебры и аль-мукабалы») в доступной форме изложил последовательность действий при решении линейных уравнений. Слово «аль-джебр» (восстановление), означающее перенос членов уравнения из одной части в другую с переменной знака, дало название новой науке, занимающейся вопросами решения уравнений.

Отсутствие удобной символики тормозило развитие алгебры: выражения и формулы приходилось описывать словами. Значительный шаг к использованию букв был сделан только в XVI—XVII вв. Французский математик Франсуа Виет ввел буквенные обозначения для чисел, что позволило решать многие задачи в общем виде, записывая результат в виде формул. Другой французский математик, Рене Декарт, впервые в математике стал рассматривать буквы в уравнениях как переменные. В своей книге «Геометрия» (1637) Декарт обозначал переменные при помощи последних букв латинского алфавита x , y , z , а числа — начальными буквами a , b , c . Предложенные Декартом символы скоро стали общепотребительными. Декарту принадлежит и современная запись степени: x^3 , x^4 и т. д. Знак равенства впервые использовал английский математик Р. Рекорд в середине XVI в., однако широкое распространение он получил лишь в конце XVIII в. Почти на сто лет раньше знака равенства в математическую литературу вошли знаки неравенств «>» и «<».

Таким образом, ко второй половине XVII в. в основном сформировалась система обозначений, которой мы сейчас пользуемся. «Следует заботиться о том, чтобы обозначения были удобны для открытий», — писал Лейбниц. Успехи алгебры за прошедшие три с половиной века доказали удобство обозначений Декарта.

Упражнения

554. Решите уравнение:

- 1) $(4y - 5)(3y - 1) - (2y - 7)(6y + 7) + 54 = 0$;
- 2) $(3y - 6)(4y - 2) - (2y - 9)(6y + 5) - 1 = 0$;
- 3) $(2x - 3)^2 - (2x - 1)(2x + 3) = 4$;
- 4) $(7 - 3y)^2 - (5y + 1)(2y - 5) + y^2 = 0$;
- 5) $\bigcirc (x - 0,2)(x + 0,2) + 2,04 + 24x^2 = (1 - 5x)^2$;
- 6) $\bigcirc (3x + 1)^2 - (x + 0,1)(x - 0,1) = 8x^2 - 2,02$.

555. Решите уравнение:

- 1) $\frac{6x + 7}{7} + x = \frac{80 + 4x}{5} - \frac{30 - 2x}{2}$;
- 2) $\frac{5x + 21}{3} - 2x = \frac{4 - 3x}{4} + \frac{5x + 28}{8}$;
- 3) $\frac{x + 1}{8} - 3 = \frac{3x - 1}{5} - \frac{5x + 1}{6}$;
- 4) $\frac{5y + 1}{3} - \frac{16 - y}{6} = \frac{9y + 1}{7} + 3$.

556. Используя разложение на множители, решите уравнение:

- | | |
|----------------------|--|
| 1) $y^2 + 20y = 0$; | 7) $0,36 = 49y^2$; |
| 2) $x^2 - 15x = 0$; | 8) $0,04n^2 = 1$; |
| 3) $p^2 = 0,5p$; | 9) $(x - 5)^2 - 9 = 0$; |
| 4) $2q^2 = -3q$; | 10) $(y + 5)^2 - 4 = 0$; |
| 5) $x^2 - 121 = 0$; | 11) $\bullet z^3 - 5z^2 + 3z - 15 = 0$; |
| 6) $9y^2 - 36 = 0$; | 12) $\bullet x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$. |

557. Решите устно систему уравнений:

- | | |
|--|--|
| 1) $\begin{cases} 3x + y = 36, \\ y = 3x; \end{cases}$ | 2) $\begin{cases} x + y = 9, \\ x - y = 11. \end{cases}$ |
|--|--|

558. Решите систему уравнений:

- 1) $\begin{cases} 16x - 27y = 160, \\ x + 3y = 10; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} 5x - 9y = 2, \\ 10x + 3y = -14; \end{cases}$
- 3) $\begin{cases} 12x - 11y = 18, \\ 18x + 7y = -20; \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + y^2 - 16, \\ 10x - 3y = 1; \end{cases}$

$$5) \begin{cases} (x-3)^2 + (y+4)^2 = x^2 + y^2, \\ 3x - 2y = 6,5; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} (x-5)^2 - (y-3)^2 = x^2 - y^2, \\ 5x + 3y = 15. \end{cases}$$

559. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} \frac{x-1}{2} + \frac{4x+y}{9} = 1 + \frac{7y-1}{12}, \\ \frac{x+y}{2} - \frac{5y-x}{6} + \frac{3y-1}{5} = x; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{3x+1}{5} - \frac{5x+2y}{9} + \frac{y+1}{4} = 1, \\ \frac{2y-x}{2} - \frac{3x-2y}{10} + \frac{3y+4}{5} = y. \end{cases}$$

560. Имеет ли решение система уравнений (если имеет, найдите его):

$$1) \begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 3x + 2y = 8, \\ 5x - 11y = 9; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3x + 2y = 32, \\ 5x + 7y = 57, \\ 4x - 9y = 31? \end{cases}$$

561. Решите систему уравнений, считая a и b числами, а x и y — переменными:

$$1) \begin{cases} x - y = 5a - 3b, \\ 2x + y = 4a - 6b; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + y = 3a - 5b, \\ y - x = a + 7b. \end{cases}$$

562. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} x^2 - y^2 = 184, \\ x - y = 4; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x^2 - xy = 1025, \\ x - y = 25; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^2 - y^2 = 800, \\ x + y = 50; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x^2 + xy = 1080, \\ x + y = 40. \end{cases}$$

563. Решите систему уравнений:

$$1) \begin{cases} x + y + z = 6, \\ x - y - z = -10, \\ x - y + z = 0; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 9, \\ x - 3y + 2z = 1, \\ 2x - 5y + 3z = 0. \end{cases}$$

Решите задачи, составляя уравнения или системы уравнений.

564. 1) Туристы отправились в трехдневный поход. Расстояние, пройденное в первый день, было в 1,2 раза меньше расстояния, пройденного во второй день, а последний отрезок пути был равен 40% пути, пройденного за пер-

вые два дня. Определите, сколько километров проходили туристы за каждый из трех дней, если всего за три дня они прошли 77 км.

2) В трех цехах работает 4550 человек, причем в первом цехе работает в 1,5 раза больше, чем во втором, а в третьем — 30% от числа работающих в двух первых цехах. Сколько человек работает в каждом цехе завода?

565. 1) Отправляясь в турпоход, учащиеся приобрели крупу двух сортов: по 14 р. и по 9 р. за килограмм. Сколько крупы каждого сорта было куплено, если всего купили 19 кг крупы на сумму 196 р.?

2) За 23 кг конфет двух сортов уплатили 2040 р. Килограмм конфет одного сорта стоит 75 р., а килограмм конфет другого сорта — 96 р. Сколько килограммов конфет каждого сорта было куплено?

566. 1) Число коров в стаде возросло на 60 голов, а в связи с улучшением кормовой базы удой молока от одной коровы возрос в среднем с 12,8 л до 15 л в день. Сколько коров в стаде, если стали получать ежедневно на 1340 л больше молока, чем раньше?

2) Применение для перевозки зерна автопоезда (грузовика с прицепом) позволило за один рейс перевозить на 4,3 т больше зерна, чем раньше на одном грузовике. Сколько тонн зерна перевозит автопоезд за один рейс, если он за три рейса перевозит на 10,4 т больше зерна, чем один грузовик за 4 рейса?

567. 1) В овощной магазин завезли картофель и морковь.

В первый день продали 40% картофеля и $\frac{2}{3}$ моркови, что составило 20 т. Во второй день продали $\frac{2}{3}$ оставшегося картофеля и всю оставшуюся морковь — всего 15 т. Сколько картофеля и сколько моркови было завезено в магазин?

2) В город отправляли арбузы и дыни. В первый день отправили $\frac{1}{3}$ всех арбузов и 60% всех дынь, что составило 44 т. Во второй день отправили 46 т, в том числе 75% оставшихся арбузов и все оставшиеся дыни. Сколько тонн дынь было выделено для отправки в город?

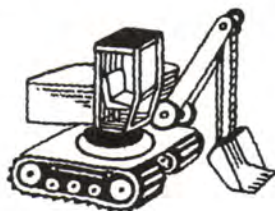
568. 1) Автомобиль «Волга» израсходовал на пробег 175 км на 7,7 л меньше бензина, чем джип «Чероки» на пробег 200 км. Сколько бензина расходует в среднем каждый автомобиль на 100 км пути, если «Чероки» расходует на каждый километр на 0,028 л бензина больше, чем «Волга»?

2) При испытании двух двигателей разной мощности первый израсходовал за 6 ч работы на 24 кг больше горючего, чем второй двигатель за 4 ч работы. Сколько горючего расходует каждый двигатель в час, если первый расходует в час на 2 кг больше горючего, чем второй?

569. 1) Бригада лесорубов должна была по плану за 10 дней заготовить некоторое количество леса. Перевыполняя дневную норму на 20 м^3 , бригада уже за 1 день до срока заготовила на 60 м^3 больше леса, чем планировалось первоначально. Сколько кубометров леса намечалось заготовить?

2) Бригада трактористов должна была распахивать ежедневно по 28 га зяби. Перевыполняя план ежедневно на 4 га, бригада уже за 1 день до срока выполнила плановое задание. Сколько гектаров распахала бригада?

570. 1) При постройке гидроэлектростанции бригада экскаваторщиков должна была по плану вынимать ежедневно по 860 м^3 грунта. Перевыполняя план на 20% в день, бригада закончила работу на 2 дня раньше намеченного срока. За сколько дней должна была закончить работу бригада по плану?



2) Два станкостроительных завода должны были по плану выпустить 90 станков за месяц. Первый из них перевыполнил месячный план на 20%, а второй — на 25%, поэтому оба завода выпустили к концу месяца на 20 станков больше, чем планировалось. Сколько станков выпустил каждый завод за месяц?

571. 1) Одна из двух бригад добилась среднего урожая зерновых по 45 ц с 1 га, а другая, у которой под зерновыми было на 20 га меньше, чем у первой, — по 48 ц с 1 га, причем всего вторая бригада собрала на 300 ц зерна больше, чем первая. Сколько центнеров зерна было собрано каждой бригадой?

2) Одна из двух бригад убирала картофель с площади 90 га, а другая — с площади 100 га. По итогам уборки оказалось, что, хотя первая бригада и собрала на 150 ц меньше картофеля, чем вторая бригада, средний урожай с 1 га у нее оказался выше, чем у первой бригады, на 1 ц. Сколько картофеля было убрано каждой бригадой?

572. 1) В одной котельной было 25 т угля, а в другой — 20 т. Первая котельная расходовала в день на 75% больше угля, чем вторая, и через 30 дней в ней осталось в 2 раза меньше угля, чем во второй котельной. Сколько угля расходовала каждая котельная в день?

2) В одном овощехранилище было 38 т картофеля, а в другом — 70 т. В первое овощехранилище завозили ежедневно по 22 т, а во второе — по 14 т картофеля. Через сколько дней в первом овощехранилище стало в 1,4 раза больше картофеля, чем во втором?

573. 1) Сплав меди и цинка содержал 82% меди. После добавления в сплав 18 кг цинка содержание меди в сплаве понизилось до 70%. Сколько меди и цинка было в сплаве первоначально?

2) Сплав олова и меди массой 16 кг содержал 55% олова. Сколько олова надо было добавить в сплав, чтобы содержание в нем меди составило 40%?

3) При смешивании морской и пресной воды получили 60 м³ воды плотностью 1,01 т/м³. Сколько было взято кубометров морской воды и сколько пресной, если плотность морской воды 1,03 т/м³, а плотность пресной 1 т/м³?

574. 1) Разделите число 850 на две части так, чтобы 4% первой части были меньше 4,5% второй части на 2% всего числа.

2) Разделите число 750 на две части так, чтобы 8% первой части в сумме с 24% второй части составили 11,2% всего числа.

575. 1) Два трактора могут вспахать поле за 60 ч. После 12 ч совместной работы один трактор был переведен на другой участок, а другой трактор, проработав еще 80 ч, закончил вспашку поля. За сколько часов мог бы вспахать поле каждый трактор?

2) Для выполнения заказа мастер и его ученик работали совместно 4 ч, а затем мастер начал новую работу,

и ученик, работая один, закончил выполнение заказа за 5 ч. За сколько часов мог бы выполнить заказ каждый из них, если ученику на выполнение заказа нужно в 1,5 раза больше времени, чем мастеру?

- 576.** 1) Если сторону квадрата уменьшить на 4 м, то получится квадрат, площадь которого меньше площади первоначального квадрата на 96 м^2 . Найдите площадь квадрата.
2) Основание прямоугольника в 1,5 раза больше его высоты. Если основание уменьшить на 6 м, а высоту увеличить на 6 м, то получится прямоугольник, площадь которого на 84 м^2 больше площади первоначального прямоугольника. Какова площадь прямоугольника?
- 577.** 1) Из поселка в город по двум дорогам, одна из которых была на 2,75 км длиннее другой, одновременно выехали два велосипедиста. Один ехал по короткой дороге со скоростью 0,25 км/мин, другой — по длинной со скоростью 18 км/ч. Найдите длину каждой дороги, если известно, что первый велосипедист прибыл в город на 5 мин позже второго.
2) Велосипедист ехал по некоторому маршруту со скоростью 16 км/ч, а возвращался по другой дороге, длина которой была на 6 км больше, со скоростью 18 км/ч. На обратный путь он затратил на 7,5 мин больше времени. Найдите длины обеих дорог.
- 578.** 1) Велосипедист ехал из пункта M в N по шоссе со скоростью 16 км/ч, а возвращался по проселочной дороге, которая была на 6 км длиннее, со скоростью 12 км/ч. Сколько километров проехал велосипедист по шоссе и сколько по проселочной дороге, если на весь путь он затратил 4 ч?
2) Лыжная трасса состоит из подъема и спуска, причем подъем на 8 км короче спуска. Лыжник спускался со скоростью 18 км/ч, а поднимался со скоростью 8 км/ч, затратив на подъем на 15 мин больше времени, чем на спуск. Найдите длину каждого из участков трассы.
- 579.** 1) Поезд шел от станции A до станции B со скоростью 80 км/ч, а от станции B до станции C — со скоростью 90 км/ч. На весь путь от A до C поезду понадобилось 5 ч, считая 20-минутную остановку в B . Сколько километров между A и B и между B и C , если расстояние между станциями A и C равно 400 км?

2) Турист ехал на мопеде сначала по грунтовой дороге со скоростью 18 км/ч, а затем по лесной тропинке — со скоростью 12 км/ч. Всего он находился в пути 5 ч и проехал 78 км. Сколько километров проехал турист по грунтовой дороге и сколько по тропинке?

580. 1) На маршруте AB длиной 40 км турист первые 5 ч шел с одной скоростью, а затем после 40-минутного привала снизил скорость на 0,5 км/ч и прибыл в B , затратив на весь путь 9 ч. С какой скоростью шел турист после привала?

2) Спортсмен плыл 18 мин по течению реки, а затем еще 6 мин против течения со скоростью на 20 м/мин меньшей. С какой скоростью плыл спортсмен против течения, если всего он проплыл 1080 м?

581. 1) Расстояние от M до K поезд проходит за 2 ч. Если скорость поезда увеличить на 25 км/ч, то уже через полтора часа после выхода из M ему останется пройти 10 км до K . Найдите расстояние от M до K .

2) Турист, выйдя из пункта C , рассчитал, что если будет идти к автобусной остановке со скоростью 4,5 км/ч, то опоздает на 20 мин. Поэтому он увеличил скорость на 1,5 км/ч и пришел на остановку точно к моменту отправления автобуса. Сколько километров от пункта C до автобусной остановки?

582. 1) В 8 ч от станции A в направлении станции B , расстояние до которой 480 км, был отправлен скорый поезд. Через 36 мин ему навстречу из B вышел товарный поезд. В котором часу и на каком расстоянии от станции B поезда встретились, если скорость товарного поезда 80 км/ч, а скорого — 96 км/ч?

2) В 9 ч из пункта M по маршруту MKL со скоростью 54 км/ч выехал мотоциклист. Через 45 мин из K в L со скоростью 16 км/ч выехал велосипедист. Определите, в котором часу мотоциклист догнал велосипедиста, если расстояние между пунктами M и K равно 69 км.

583. 1) Турист планировал ехать на мотороллере из пункта A в B со скоростью 60 км/ч. Однако через 25 мин после отправления из A ему пришлось снизить скорость на 10 км/ч, так как дорога пошла в гору. Из-за этого он приехал в пункт B на 13 мин позже, чем предполагал. Чему равно расстояние между пунктами A и B ?

2) Поезд должен был пройти расстояние между станциями BC со скоростью 96 км/ч . Однако через полтора часа после выхода из B вследствие ремонта пути он был задержан на 30 мин и, чтобы прибыть в C по расписанию, должен был оставшееся расстояние идти со скоростью 108 км/ч . Сколько километров между станциями B и C ?

584. 1) Два туриста отправились одновременно навстречу друг другу из пунктов M и N , между которыми 33 км . Через $3 \text{ ч } 12 \text{ мин}$ расстояние между туристами сократилось до 1 км , а еще через $2 \text{ ч } 18 \text{ мин}$ первому оставалось пройти до N вдвое меньше, чем второму до M . Найдите скорость каждого туриста.

2) Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Спустя $1 \text{ ч } 24 \text{ мин}$ в том же направлении из A выехал велосипедист. Через час велосипедист был на расстоянии 1 км позади пешехода, а еще через час велосипедисту оставалось до B вдвое меньшее расстояние, чем пешеходу. Найдите скорости пешехода и велосипедиста, если известно, что расстояние между пунктами A и B равно 27 км .

585. 1) Рычаг уравновешен двумя грузами весом 120 Н и 320 Н . Если вес меньшего груза увеличить на 40 Н , то больший груз придется удалить от точки опоры на 2 см . Найдите длины обоих плеч рычага.

2) Рычаг уравновешен двумя грузами весом 500 Н и 400 Н . Если вес большего груза уменьшить на 200 Н , то для сохранения равновесия точку опоры придется сдвинуть на 3 м . Найдите длины обоих плеч рычага.

3) Два мальчика качаются на доске, перекинутой через бревно (рис. 66). Один из них для равновесия сел на 1 м ближе к точке опоры, чем другой. Зная, что массы мальчиков соответственно равны 50 кг и 40 кг , определите, на каком расстоянии от точки опоры сидит каждый из них.



Рис. 66

586. 1) Урок математики начался в $8 \text{ ч } 30 \text{ мин}$. Через некоторое время ученик заметил, что стрелки на классных часах совпали. В котором часу это было?

2) Первый урок должен заканчиваться в 9 ч 15 мин, однако звонок раздался только тогда, когда стрелки часов образовали развернутый угол. На сколько секунд позже был дан звонок?

- 587.** Теплоход проходит расстояние между пристанями B и C по течению за 6 ч, а обратно против течения — за 8 ч. Сколько времени понадобится плоту, чтобы проплыть расстояние от пристани B до C ?
- 588.** В семье три брата: 30 лет, 20 лет и 6 лет. Через сколько лет возраст старшего брата будет равен сумме возрастов обоих младших братьев?
- 589.** Отец обещал за каждую правильно решенную задачу давать сыну по 10 р. За каждую неправильно решенную задачу сын должен возвращать отцу по 5 р. Решив 20 задач, сын заработал 80 р. Сколько задач сын решил неправильно и сколько правильно?
- 590.** В аквариуме живут осьминоги и кальмары. У осьминогов по 8 ног, а у кальмаров — по 10. Всего у них 82 ноги. Сколько головоногих живет в аквариуме?
- 591.** Задача из «Всеобщей арифметики» И. Ньютона.
Два почтальона A и B находятся друг от друга на расстоянии 59 миль. Утром они отправляются друг другу навстречу: A проходит в 2 ч 7 миль, B — в 3 ч 8 миль. Но B выходит на час позднее, чем A . Сколько миль пройдет почтальон A до встречи с B ?
- 592.** Задача из папируса Ахмеса (2000—1700 до н. э.). Найдите число, если известно, что от прибавления к нему $\frac{2}{3}$ его и вычитания из полученной суммы ее трети получается число 10.
- 593.** Решите задачу индийского математика Бхаскары.
Один человек имеет 300 монет и 6 лошадей, а у другого 10 лошадей, но у него на 100 монет меньше. Какова цена лошади, если эти двое одинаково богаты?
- 594.** Задача Метродора, которая является надгробной надписью, высеченной на могиле древнегреческого математика Диофанта Александрийского (III в. н. э.).

Путник!

Здесь прах погребен Диофанта.

И числа поведать могут, о чудо,

Сколь долгод был век его жизни.

Часть шестую его представляло счастливое детство.

Двенадцатая часть протекла его жизни —

Пухом покрылся его подбородок.

Седьмую в бездетном браке провел Диофант.

Прошло пятилетье,

Он был осчастливлен рождением прекрасного первенца-сына,

Коему рок половину лишь жизни

Дал на земле по сравненью с отцом.

И в печали глубокой

Старец земного удела конец воспринял,

Переживши года четыре с тех пор, как сына лишился.

Скажи, сколько лет жизни достигнув,

С ней расстался мудрец?

Решите задачу арифметически (используя делимость) и составлением уравнения. Какой способ решения задачи проще?



ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ РАБОТЫ

Работа 1

Исследование площади прямоугольника данного периметра

Указания к работе

1. Периметр прямоугольника равен 24 см, а его основание x см. Задайте формулой зависимость площади S (см²) прямоугольника от x . Заполните таблицу.

x , см	2	3	4	5	5,5	5,8	5,9	6	6,1	6,2	6,5	7	8	9	10
S , см ²															

2. При каком значении x получился прямоугольник наибольшей площади? Каково наибольшее из полученных значений S ?

3. Выберите сами два каких-либо значения x и вычислите соответствующие значения S . Удалось ли вам получить значение S большее, чем найденное ранее?

4. Какую гипотезу (гипотеза — научное предположение) можно высказать на основании проведенного исследования о форме прямоугольника наибольшей площади, имеющего данный периметр?

Работа 2

Построение графика зависимости высоты столба жидкости от объема жидкости в сосуде

Приборы и материалы: ведро стандартное (формы цилиндра или усеченного конуса), банка литровая, линейка.

Указания к работе

1. Налейте в ведро 1 л воды.
2. Измерьте высоту столба жидкости, опустив в ведро линейку.
3. Запишите полученный результат в таблицу.

Объем воды V , л	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Высота столба воды h , см										

4. Доливая в ведро по 1 л воды и производя измерения высоты столба воды, заполните таблицу.

5. Постройте график зависимости h от V (на оси h 1 см соответствует 2 см высоты столба воды, на оси V 1 см соответствует 1 л воды).

6. Какой график у вас получился — прямолинейный или криволинейный?

Работа 3

Исследование некоторых простейших множеств точек координатной плоскости

Указания к работе

1. Постройте на координатной плоскости несколько точек, у которых сумма абсцисс и ординат равна 10 (при выборе координат точек используйте и отрицательные числа).

2. В чем особенность расположения построенных точек? Как располагаются на плоскости все точки, у которых сумма координат равна 10? Выскажите гипотезу.

3. Возьмите несколько точек, у которых сумма абсциссы и ординаты: 1) больше 10; 2) меньше 10.

4. Выскажите гипотезу о расположении точек на плоскости для случаев 1) и 2).

Работа 4

График расстояния от точки прямой до начала координат

Указания к работе

1. Постройте на координатной плоскости прямую $3x + 4y = 12$.

2. Найдите расстояние от точек данной прямой до начала координат с помощью измерительного циркуля и линейки.

3. Данные занесите в таблицу, где x — абсцисса точки прямой $3x + 4y = 12$, d — расстояние от этой точки до начала координат.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
d													

4. Постройте график зависимости d от x .

Работа 5

График изменения расстояния

Туристы отправились на байдарках по течению реки из пункта A в пункт B со скоростью 5 км/ч. После 3 ч пути они сделали остановку на 1 ч, а затем поплыли дальше со скоростью 6 км/ч. На рисунке 67 изображена схема маршрута туристов, на которой отмечены отрезки пути длиной 1 км.

Приборы и материалы: схема маршрута туристов в масштабе 1 : 200 000, измерительный циркуль, линейка.

Указания к работе

1. Определите на схеме точку, в которой находились туристы через 1 ч после отправления из A .

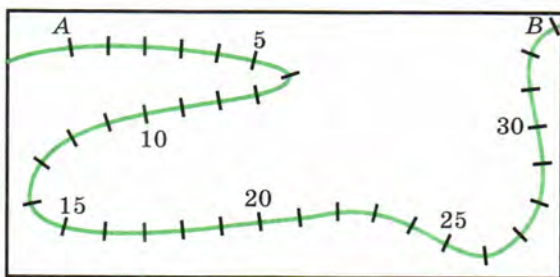


Рис. 67

2. Найдите расстояние (по прямой) от этой точки до пункта A (первый вариант); до пункта B (второй вариант).

3. Запишите полученный результат в таблицу.

Время t , ч	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7
Расстояние d , км													

4. Определите на схеме точки, в которых находились туристы через 2 ч, через 3 ч и т. д. после отправления из пункта А, и найдите соответствующие расстояния. Заполните таблицу.

5. Постройте график зависимости d от t .

Работа 6

Исследование площади прямоугольника, вписанного в треугольник

В треугольник ABC , основание которого 10 см, а высота 8 см, вписано несколько прямоугольников различной высоты, каждый из которых имеет две вершины на основании, а две другие — на боковых сторонах треугольника (рис. 68).

Учитывая, что можно построить сколько угодно вписанных таким образом прямоугольников, постройте самостоятельно прямоугольники с высотами, указанными в таблице, измерьте основание каждого прямоугольника и вычислите его площадь. Результаты запишите в таблицу.

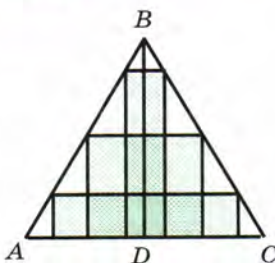


Рис. 68

h — высота прямоугольника, см	0,5	1	2	3	3,5	4	4,5	5	6	7,5
a — основание прямоугольника, см										
S — площадь прямоугольника, см ²										

При каком значении h у вас получился прямоугольник наибольшей площади? Каково наибольшее из полученных значений S ? Сравните высоту, основание и площадь этого прямоугольника соответственно с высотой, основанием и площадью треугольника ABC . Какую гипотезу можно высказать в результате проведенного исследования?

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

I. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задачи на выполнение плановых заданий

Задача 1

На строительстве плотины укладчики бетона, перевыполняя дневную норму на 180 м^3 , не только выполнили 10-дневное задание за один день до срока, но и уложили дополнительно 320 м^3 бетона. Какова была дневная норма укладки бетона?

Обозначив дневную норму укладки бетона (в м^3) буквой x , запишите:

а) сколько кубометров бетона должно было быть уложено за 10 дней по плану;

б) сколько кубометров бетона рабочие укладывали за 1 день;

в) сколько кубометров бетона было уложено за 1 день до срока.

Сравните количество бетона (в м^3), уложенное за 1 день до срока, с количеством бетона (в м^3), которое планировалось уложить за 10 дней, и запишите уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ задачи.

Дополнительные вопросы

1. На сколько процентов перевыполнялась укладчиками дневная норма? (Ответ округлите до десятых долей процента.)

2. Сколько кубометров бетона будет уложено за 10 дней, если укладчики будут продолжать работать в том же темпе?

Задача 2

Агрофирма планировала провести сев за 14 дней. Перевыполняя план, работники засеивали в день на 30 га больше, чем планировалось, и уже за 4 дня до срока им оставалось засеять только 20 га. Сколько гектаров должна была засеять агрофирма?

Обозначив дневную норму сева (в га) буквой x , запишите:

- а) сколько всего гектаров должна была засеять агрофирма;
- б) сколько гектаров засеивалось за 1 день;
- в) сколько гектаров было засеяно за 4 дня до срока.

Сравните число гектаров, засеянных за 4 дня до срока, с числом гектаров, которые планировала засеять агрофирма за 14 дней, и напишите уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. На сколько процентов работники перевыполняли дневную норму? (Ответ округлите до десятых долей процента.)
2. На сколько процентов был выполнен план сева за 4 дня до срока?

Задача 3

Чтобы выполнить задание в срок, токарь должен был изготавливать каждый рабочий день по 24 детали. Однако, применив новый тип резца, он изготавливал за рабочий день на 15 деталей больше и уже за 6 дней до срока изготовил сверх плана 21 деталь. Сколько всего деталей изготовил токарь?

Обозначив число дней, которые работал токарь, буквой x , выразите:

- а) количество деталей, которые изготовил токарь за время своей работы;
- б) количество дней, которые должен был бы работать токарь по плану;
- в) количество деталей, которые должен был изготовить токарь к сроку, если бы он работал резцом старого типа.

Сравните число деталей, изготовленных токарем, и число деталей, которые он должен был изготовить по плану.

Составьте уравнение, решите его и запишите ответ на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. Сколько деталей изготовит токарь к заданному сроку, используя резец нового типа?
2. На сколько процентов при этом он перевыполнит плановое задание? (Ответ округлите до десятых долей процента.)

Задачи на изменение количества

Задача 4

В одном овощехранилище было 440 т картофеля, а в другом — 408 т. Из первого хранилища ежедневно вывозили по 60 т картофеля, а во второе ежедневно завозили по 48 т. Через сколько дней во втором овощехранилище окажется в три раза больше картофеля, чем в первом?

Обозначив искомое число дней буквой x , выразите:

а) количество тонн картофеля, вывезенного за x дней из первого овощехранилища;

б) количество тонн картофеля, завезенное за x дней во второе овощехранилище;

в) количество тонн картофеля, оставшееся через x дней в первом овощехранилище;

г) количество тонн картофеля, оказавшееся через x дней во втором овощехранилище.

Сравните количества картофеля, оказавшиеся через x дней в овощехранилищах, и запишите уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. На сколько процентов больше было картофеля в первом овощехранилище, чем во втором?
2. На сколько процентов больше оказалось картофеля во втором овощехранилище, чем в первом, через два дня?

Задача 5

В одном баке 940 л воды, а в другом — 480 л. Из первого выливают за час в 3 раза больше воды, чем из второго. Через 5 ч в первом баке останется на 40 л меньше воды, чем во втором. Сколько литров воды выливается из каждого бака за 1 ч?

Обозначив количество воды, выливаемой за 1 ч из второго бака, буквой x , выразите:

а) количество воды, выливаемой за 1 ч из первого бака;

б) количество воды, вылитой из второго бака за 5 ч;

- в) количество воды, вылитой из первого бака за 5 ч;
г) количество воды, оставшейся в каждом из баков через 5 ч.

Сравните оставшиеся количества воды и запишите уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. На сколько процентов объем воды в первом баке был больше, чем во втором?
2. На сколько процентов объем воды во втором баке стал больше, чем в первом, через 5 ч?

Задача 6

Один фермер заготовил в 1,5 раза больше сена, чем другой. Ежедневно первый расходовал по 0,5 т сена, а второй — по 0,3 т. Через 70 дней у первого фермера осталось на 12 т сена больше, чем у второго. Сколько сена заготовил каждый фермер?

Обозначив количество сена, заготовленного вторым фермером, буквой x , запишите:

- а) сколько тонн сена заготовил первый фермер;
- б) сколько тонн сена израсходовал каждый фермер за 70 дней;
- в) сколько тонн сена осталось у каждого фермера через 70 дней.

Сравните количество сена, которое осталось у фермеров, и запишите уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. На сколько процентов больше окажется сена у первого фермера, чем у второго, через 70 дней?
2. У кого из фермеров раньше иссякнет запас сена, если расход сена будет тем же?

Задачи на сплавы и смеси

Задача 7

Сплав меди и цинка содержал 82% меди. После добавления в сплав 18 кг цинка процентное содержание меди в сплаве понизилось до 70%. Сколько меди и сколько цинка было в сплаве первоначально?

Обозначив первоначальную массу сплава в килограммах буквой x , выразите:

- а) массу меди в сплаве;
- б) массу сплава после добавления цинка;
- в) отношение массы меди к новой массе сплава.

Составьте уравнение, учитывая, что процент содержания меди в полученном сплаве известен.

Решите уравнение и найдите массы меди и цинка в первоначальном сплаве.

Дополнительные вопросы

1. Сколько цинка нужно было добавить в первоначальный сплав, чтобы его процентное содержание составило 50%?
2. Можно ли, добавляя в первоначальный сплав равные массы меди и цинка, получить сплав, содержащий 50% цинка?

Задача 8

Сплав олова и меди, масса которого 16 кг, содержит 55% олова. Сколько килограммов олова нужно добавить, чтобы повысить содержание олова в сплаве до 60%? Обозначив искомую массу олова буквой x , выразите:

- а) сколько килограммов олова было в сплаве сначала;
- б) сколько килограммов олова стало в сплаве после добавления;
- в) массу полученного сплава;
- г) отношение массы олова к массе полученного сплава.

Запишите уравнение, решите его и ответьте на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. Какова масса меди, содержащейся в сплаве?
2. Сколько килограммов меди следовало бы добавить в первоначальный сплав, чтобы содержание меди составило 50%?

Задача 9

К 27 кг сплава свинца и олова, содержащего 40% свинца, добавили некоторое количество свинца, в результате чего содержание олова в сплаве понизилось на 6%. Сколько килограммов свинца было добавлено в сплав?

Обозначив число килограммов свинца, добавленного в сплав, буквой x , выразите:

- а) массу свинца в первоначальном сплаве;

- б) массу свинца в сплаве после добавления свинца;
в) массу сплава после добавления в него свинца;
г) отношение полученной массы свинца к массе сплава.
Учитывая, что процентное содержание свинца возросло на 6%, составьте уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. Сколько свинца нужно было бы добавить в первоначальный сплав, чтобы его содержание в сплаве оказалось равным 50%?
2. Как изменилось бы процентное содержание олова в сплаве, если в первоначальный сплав добавить 23 кг олова?

Задачи на определение площади прямоугольника

Задача 10

Длина прямоугольника на 18 м больше его ширины. Если длину прямоугольника уменьшить на 8 м, а ширину увеличить на 7 м, то его площадь увеличится на 40 м². Найдите площадь данного прямоугольника.

Обозначив ширину прямоугольника в метрах буквой x , выразите:

- а) длину прямоугольника в метрах;
- б) площадь прямоугольника в квадратных метрах;
- в) длину и ширину прямоугольника после изменения его измерений;
- г) площадь измененного прямоугольника в квадратных метрах.

Сравните площади данного и измененного прямоугольников и запишите уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. Какой из прямоугольников, данный или измененный, имеет больший периметр?
2. На сколько процентов площадь данного прямоугольника меньше площади измененного прямоугольника?

Задача 11

Длина прямоугольника в 2 раза больше его ширины. Если ширину прямоугольника увеличить на 8 дм, а длину умень-

шить на 10 дм, то площадь прямоугольника увеличится на 220 дм². Найдите площадь данного прямоугольника.

Обозначив ширину данного прямоугольника в дециметрах буквой x , выразите:

- а) длину данного прямоугольника в дециметрах;
- б) площадь того же прямоугольника в квадратных дециметрах;
- в) длину и ширину измененного прямоугольника;
- г) площадь измененного прямоугольника.

Сравните площади данного и измененного прямоугольников и запишите уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. Какой из прямоугольников, данный или измененный, имеет больший периметр и на сколько дециметров?
2. На сколько процентов площадь измененного прямоугольника больше площади данного?

Задача 12

Периметр прямоугольника равен 60 см. Если длину прямоугольника увеличить на 10 см, а ширину уменьшить на 6 см, то площадь прямоугольника уменьшится на 32 см². Найдите площадь данного прямоугольника.

Обозначив ширину прямоугольника в сантиметрах буквой x , выразите:

- а) длину прямоугольника, учитывая, что сумма длины и ширины равна половине периметра;
- б) площадь прямоугольника в квадратных сантиметрах;
- в) длину и ширину измененного прямоугольника;
- г) площадь измененного прямоугольника.

Сравните площади данного и измененного прямоугольников и запишите уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. На сколько изменится периметр прямоугольника после изменения длин его сторон?
2. На сколько процентов при этом изменится площадь прямоугольника?

Задачи на движение

Задача 13

Из A в B со скоростью 66 км/ч отправился товарный поезд, а спустя 20 мин от станции B в направлении станции A вышел скорый поезд, проходящий в час 90 км. На каком расстоянии от станции A встретятся поезда, если длина перегона AB равна 256 км?

Обозначив время движения (в часах) товарного поезда до встречи со скорым буквой x , выразите:

- а) время движения скорого поезда;
- б) путь, пройденный товарным поездом до встречи со скорым;
- в) путь, пройденный скорым поездом до встречи с товарным.

Учитывая, что сумма путей, пройденных обоими поездами до их встречи, равна AB , составьте уравнение.

Решите уравнение и ответьте на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. Какой из поездов прошел до встречи больший путь?
2. Какой из поездов прибыл раньше — товарный на станцию B или скорый на станцию A ?

Задача 14

Из M в N со скоростью 68 км/ч отправился пассажирский поезд, а спустя 6 мин вслед за ним вышел электропоезд, проходящий в час 85 км. На каком расстоянии от станции N электропоезд догонит пассажирский, если длина перегона MN равна 40 км?

Обозначив время движения (в часах), за которое электропоезд догонит пассажирский, буквой x , выразите:

- а) время движения пассажирского поезда до его обгона электропоездом;
- б) путь, пройденный пассажирским поездом до его обгона;
- в) путь, пройденный электропоездом до обгона им пассажирского поезда.

Учитывая, что поезда к моменту обгона пройдут одно и то же расстояние, составьте уравнение.

Решите уравнение и ответьте на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. Какое расстояние было между поездами в момент отправления электропоезда?
2. На сколько минут раньше пассажирского электропоезд прибудет на станцию N ? (Вычислите, округлив до минут.)

Задача 15

Из пункта M в пункт N со скоростью 15 км/ч выехал велосипедист, а через 16 мин вслед за ним выехал другой велосипедист, проезжавший в час 18 км. Чему равно расстояние, если второй велосипедист прибыл в пункт N одновременно с первым?

Обозначив время движения второго велосипедиста (в часах) буквой x , выразите:

- а) время движения первого велосипедиста;
- б) путь, проделанный вторым велосипедистом;
- в) путь, проделанный первым велосипедистом.

Учитывая, что велосипедисты проехали одно и то же расстояние, составьте уравнение.

Решите уравнение и ответьте на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. Какое расстояние успел проехать первый велосипедист к моменту отправления второго?
2. На сколько минут раньше первого возвратится второй велосипедист в M , если они отправятся в обратный путь одновременно и будут ехать с теми же скоростями, что и на пути из M ?

Задача 16

Из пункта M в пункт N велосипедист ехал по шоссе со скоростью 16 км/ч, а возвращался он со скоростью 12 км/ч по проселочной дороге, которая была на 6 км длиннее. Сколько километров проехал велосипедист по шоссе и сколько по проселочной дороге, если на весь путь он затратил 4 ч?

Обозначив длину пути по шоссе (в километрах) буквой x , выразите:

- а) длину пути велосипедиста по проселочной дороге;
- б) время (в часах), затраченное велосипедистом на путь по шоссе;
- в) время (в часах), затраченное велосипедистом на путь по проселочной дороге.

Учитывая, что время, затраченное на весь путь, известно, составьте уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. Какова средняя скорость велосипедиста на всем маршруте?
2. Сколько времени затратил бы велосипедист на весь путь, если бы по проселочной дороге он ехал на 3 км/ч быстрее, а по шоссе — на 4 км/ч медленнее?

Задача 17

Лыжная трасса состоит из подъема и спуска, причем подъем на 8 км короче спуска. Лыжник, двигаясь на спуске со скоростью 18 км/ч, а на подъеме — со скоростью 8 км/ч, затратил на подъем на 15 мин больше, чем на спуск. Найдите длину каждого участка трассы.

Обозначив длину спуска (в километрах) буквой x , выразите:

- а) длину подъема в километрах;
- б) время (в часах), затраченное на спуск;
- в) время (в часах), затраченное на подъем.

Сравнив время, затраченное на спуск и на подъем, составьте уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ.

Дополнительные вопросы

1. Какова средняя скорость лыжника на всей трассе?
2. Сколько времени затратит лыжник на обратный путь, если будет двигаться на подъеме со скоростью 8 км/ч, а на спуске — 18 км/ч?

Задача 18

Из поселка на турбазу по двум дорогам, одна из которых на 2,75 км длиннее другой, одновременно выехали два велосипедиста. Первый велосипедист, который по короткой дороге двигался со скоростью 15 км/ч, приехал на турбазу на 5 мин позднее второго, скорость которого была 18 км/ч. Найдите длину каждой дороги.

Обозначив длину короткой дороги в километрах буквой x , выразите:

- а) длину (в километрах) второй дороги;
- б) время (в часах), затраченное первым велосипедистом;
- в) время (в часах), затраченное вторым велосипедистом.

Сравнив время, затраченное велосипедистами, составьте уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ.

Дополнительные вопросы

1. На сколько метров отстал первый велосипедист от второго?
2. На сколько минут раньше второго прибыл бы на турбазу первый велосипедист, если бы он ехал со скоростью 18 км/ч, а второй — со скоростью 15 км/ч?

Задача 19

Лодка проплыла по течению реки на 11 км больше, чем против течения, затратив на весь путь 3 ч. Зная, что скорость лодки в стоячей воде равна 5 км/ч, а скорость течения — 2 км/ч, определите, сколько всего километров проплыла лодка.

Обозначив расстояние (в километрах), пройденное лодкой против течения реки, буквой x , выразите:

- а) расстояние (в километрах), пройденное лодкой по течению реки;
- б) скорость лодки по течению и против течения реки;
- в) время движения лодки по течению и против течения реки.

Учитывая, что на весь путь лодка затратила 3 ч, составьте уравнение.

Решите уравнение и запишите ответ.

Дополнительные вопросы

1. Какова средняя скорость движения лодки на всем пути?
2. Сколько времени потребовалось бы лодке, чтобы проплыть то же расстояние в стоячей воде?

Задача 20

Моторная лодка прошла по реке 46 км за 3 ч, причем часть пути против течения, а часть — по течению реки. Зная, что скорость течения реки 1 км/ч, а скорость лодки в стоячей воде — 15 км/ч, определите, сколько километров прошла лодка по течению и сколько против течения реки.

Обозначив путь (в километрах), пройденный лодкой против течения реки, буквой x , выразите:

- а) путь, пройденный по течению реки;
- б) скорость лодки по течению и против течения;
- в) время движения по течению и против течения.

Учитывая, что время, затраченное на весь путь, известно, составьте уравнение.

Решите уравнение и ответьте на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. Какова средняя скорость лодки на всем пути?
2. Сколько времени понадобилось бы лодке, чтобы пройти то же расстояние в стоячей воде?

Задача 21

В стоячей воде турист на байдарке обычно развивал скорость $6,5$ км/ч. Однажды он решил проплыть по реке расстояние AB в оба конца за определенное время, но при этом не учел скорости течения, равной $1,5$ км/ч, и затратил на весь маршрут на 27 мин больше, чем предполагал. Чему равно расстояние AB ?

Обозначив расстояние AB (в километрах) буквой x , выразите:

- а) время в часах, которое понадобилось туристу на путь по течению и против течения;
- б) время, которое затратил бы турист на путь AB в оба конца в стоячей воде;
- в) время, затраченное туристом на путь AB в оба конца.

Сравнив время, которое затрачивает турист на путь ABA по реке и в стоячей воде, составьте уравнение.

Решите уравнение и ответьте на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. С какой средней скоростью турист проплыл маршрут ABA ?
2. На сколько дольше плыл турист против течения, чем по течению?

II. ЗАДАЧИ НА СОСТАВЛЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задача 22

В двух баках содержится разное количество керосина. Если из первого бака отлить 18 л, а из второго — 12 л керосина, то во втором баке останется керосина вдвое больше, чем в первом. Если же из первого отлить 8 л, а из второго — 16 л, то число литров керосина, оставшегося в первом баке, будет относиться к числу литров керосина, оставшегося во втором баке, как $7 : 8$. Сколько керосина содержится в каждом из баков?

Обозначив число литров керосина в первом баке буквой x , а число литров керосина во втором баке буквой y , запишите:

а) сколько керосина останется в каждом из баков, если из них отлить соответственно 18 л и 12 л;

б) сколько керосина останется в каждом из баков, если из них отлить соответственно 8 л и 16 л.

Сравнив оставшееся количество керосина в первом и во втором случае, запишите соответствующие уравнения.

Решите систему уравнений и ответьте на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. На сколько процентов керосина во втором баке больше, чем в первом?
2. Как изменится процентное отношение, если в каждый из баков долить по 6 л керосина?

Задача 23

На двух полках лежат книги. Если с первой полки взять 6 книг, а со второй 11 книг, то на первой полке книг станет в полтора раза больше, чем на второй. Если же с каждой полки взять по 3 книги, то число книг, оставшихся на первой полке, будет относиться к числу книг на второй полке, как 6 : 7. Сколько книг стоит на каждой полке?

Обозначив число книг на первой полке буквой x , а на второй полке буквой y , выразите:

а) сколько книг останется на каждой полке, если с первой снять 6 книг, а со второй — 11 книг;

б) сколько книг останется на каждой полке, если и с первой, и со второй полки снять по 3 книги.

Сравнив оставшееся в каждом случае количество книг на полках, составьте систему уравнений.

Решите систему уравнений и ответьте на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. На сколько процентов число книг на второй полке превышает число книг на первой полке?
2. Как изменится процентное отношение, если на каждую полку поставить еще по 10 книг?

Задача 24

Для клуба решили приобрести 4 баяна и 3 аккордеона на сумму 66 000 р. Однако из-за повышения цен (баяны стали стоить дороже на 75%, а аккордеоны на 80%) клубу пришлось заплатить 117 300 р. Сколько стоили баян и аккордеон до повышения цен?

Обозначив первоначальную цену (в рублях) одного баяна буквой x , а аккордеона буквой y , выразите:

- а) стоимость 4 баянов и 3 аккордеонов до повышения цен;
- б) новую цену 1 баяна и 1 аккордеона;
- в) стоимость 4 баянов и 3 аккордеонов после повышения цен.

Учитывая стоимость покупки до и после повышения цен, составьте два уравнения.

Решите систему уравнений и запишите ответ на вопрос задачи.

Дополнительные вопросы

1. Каковы новые цены баяна и аккордеона?
2. На сколько процентов больше придется уплатить за 1 баян и 1 аккордеон после повышения цен?



ПРОВЕРЬ СЕБЯ!

Домашние контрольные работы

Работа 1

Тема «Выражения»

1. Вычислите: $\frac{17}{21} + 2\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{11}{36} - \frac{13}{60}\right)$.

2. Найдите значение выражения $\frac{(a-b)a+2b}{0,11a}$ при $a = \frac{5}{6}$,
 $b = -\frac{1}{3}$.

3. Составьте выражение для решения задачи.

Два туриста вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу со скоростями u км/ч и v км/ч. Какое расстояние будет между ними через 2 ч, если расстояние между A и B составляет 35 км?

4. Подберите значения переменных так, чтобы при их подстановке в предложение $5x - (3x - 2y) = 2x - 2y$ оно превратилось:

1) в истинное высказывание; 2) в ложное высказывание.

5. ● Может ли отрицательное число быть:

1) больше своего квадрата; 2) меньше своего куба?

(В случае утвердительного ответа приведите пример, а в случае отрицательного ответа приведите обоснование.)

Работа 2

Тема «Уравнения»

1. Решите уравнение $x(x+8)(x-9) = 0$.

2. Решите систему уравнений $\begin{cases} 5x + 3y = 29, \\ 7x + 4y = 41. \end{cases}$

3. Составьте уравнение по условию задачи, обозначив длину прямоугольника буквой x .

Периметр прямоугольника равен 30 см. Если длину прямоугольника увеличить на 5 см, а ширину уменьшить на 3 см, то его площадь уменьшится на 8 см^2 . Найдите длину и ширину прямоугольника.

4. Решите задачу составлением системы уравнений.

Известно, что сумма двух положительных чисел в два раза больше их разности и что 40% одного числа на 17 больше, чем 35% другого. Найдите эти числа.

5. Найдите двузначное число, квадрат первой цифры которого меньше квадрата второй его цифры на само число.

Работа 3

Тема «Функция»

1. Для функции $f(x) = 3x - 0,2x^2$ найдите:

1) $f(-15)$;

2) $f(0,2)$;

3) $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

2. По графику функции $y = f(x)$, изображенному на рисунке 69, найдите:

1) значение аргумента, при котором значение функции равно: а) -2 ; б) 7 ;

2) ординату точки графика функции, абсцисса которой равна: а) 3 ; б) -2 ;

3) координаты точек пересечения с осями.

3. Существует ли такое значение аргумента x , при котором равны значения функций: $y = \frac{3x-5}{2}$ и $y = \frac{5x-2}{3}$?

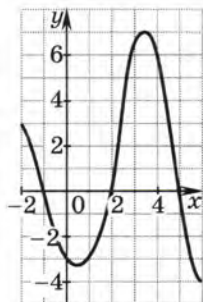


Рис. 69

4. В электросамоваре содержится 3 л воды. Каждую секунду из него вытекает 25 см^3 воды. Сколько воды останется в самоваре, если кран будет открыт t с? Обозначив искомую величину через V (л), задайте зависимость V от t формулой. Является ли переменная V функцией переменной t ? (Если является, то укажите множество допустимых значений t .)

5. Постройте прямую, симметричную прямой $y = -\frac{1}{3}x$ относительно оси ординат, и запишите функцию, график которой получился.

Работа 4

Тема «Линейная функция»

1. Проходит ли график функции $y = 1\frac{1}{3}x$ через точку $A(-\frac{5}{6}; -1\frac{1}{9})$?

2. 1) Постройте график функции $y = 0,8x - 6$.

2) Найдите:

а) ординату точки графика функции, абсцисса которой равна: -2 ; 250 ; $-0,05$;

б) абсциссу точки графика функции, ордината которой равна: 0 ; 22 .

3. Прямая пересекает координатные оси в точках $A(5; 0)$ и $B(0; -2)$. Напишите какое-нибудь линейное уравнение, графиком которого является эта прямая.

4. Пересекаются ли прямые, заданные уравнениями: $8x + 3y = 73$ и $4x + 1,5y = 60$?

Если пересекаются, то найдите точку пересечения данных прямых.

Работа 5

Тема «Степень и ее свойства»

1. Из чисел 2, 3, 5, 6 составьте выражение, для вычисления значения которого нужно выполнить действия в следующем порядке: сложение, умножение и возведение в степень.

2. Представьте в виде степени:

1) $a^{16} \cdot a^{19}$; 2) $(b^8)^{13}$; 3) $(-4c^2)^3$; 4) $(-\frac{2}{3}d^3)^4$.

3. Сравните значения выражений:

1) $2^5 \cdot 2^7$ и 4^6 ; 2) $2^8 \cdot 2^{10}$ и 8^6 .

4. Запишите результат вычислений в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$:

1) $(4 \cdot 10^4)^3$; 2) $(2 \cdot 10^5)^5 \cdot (3 \cdot 10^7)^2$.

5. Скорость грузового автомобиля на пути из деревни в город была на 20% меньше, и ушло на него на 45 мин больше, чем на обратный путь. Найдите время, затраченное грузовым автомобилем на обратный путь.

Работа 6

Тема «Действия со степенями»

1. Приведите к одночлену стандартного вида выражение

$$\left(-\frac{5}{6}a^2x^3\right)^3 \cdot \left(-7\frac{1}{5}ax^5\right).$$

2. Сократите дробь:

$$1) \frac{168a^5b^6}{105a^8b^3}; \quad 2) \frac{(x^3)^4 \cdot (-x^2)^5}{(-x)^6 \cdot (-x^4)^3}.$$

3. Решите уравнение:

$$1) \left(\frac{2}{3}x\right)^2 = \frac{16}{27 \cdot 3}; \quad 2) \frac{7^3}{5^2x} = \frac{343}{125}.$$

4. Известно, что число a больше своего квадрата. Расположите в порядке возрастания числа a , $\frac{1}{a}$ и a^2 .

5. Впишите в скобки пропущенные одночлены так, чтобы получилось тождество $(\dots)^2 \cdot (\dots)^3 = -4a^8b^9c^{11}$.

Работа 7

Тема «Произведение одночлена и многочлена»

1. Приведите к стандартному виду многочлен

$$2a^2 - b(2a - b) - a(2a - 5b).$$

2. Представьте в виде разности двучлена и трехчлена многочлен $a^4 - 3a^3 + 2a^2 + 5a - 9$.

3. Разложите на множители:

$$1) 16c^8 - 8c^9; \quad 2) 8a(a - 63) - (a - 63)^2.$$

4. Решите уравнение $7x^2 - 14x = 0$.

5.* Докажите, что сумма пяти последовательных натуральных чисел делится на среднее из них и кратна 5.

Работа 8

Тема «Произведение многочленов»

1. Приведите к многочлену стандартного вида выражение

$$(a - 6)(a + 5)(a - 1) - (a^2 - 2a)(a + 1).$$

2. Разложите на множители:

1) $9x - 15y + 20xy^2 - 12x^2y$; 2) $(3a - 4)^3 + a(3a - 4)^2$.

3. Решите задачу составлением уравнения или системы уравнений.

Периметр прямоугольника равен 65 см. Если длину прямоугольника уменьшить на 6 см, а ширину увеличить на 2 см, то его площадь уменьшится на 27 см². Найдите площадь прямоугольника.

4. Решите уравнение, разложив его левую часть на множители $y^3 - 2y^2 + 3y - 6 = 0$.

5. Впишите пропущенные одночлены так, чтобы получилось тождество $20ac + 8bc + 6ab + \dots = (3a + 4c)(\dots + \dots)$.

Работа 9

Тема «Формулы сокращенного умножения»

1. Упростите выражение, используя формулы сокращенного умножения:

1) $(6x - 7)^2 - (5x + 7)(5x - 7)$; 2) $y(y + 6)^2 - (y + 1)(y - 6)^2$.

2. Представьте в виде квадрата двучлена:

1) $100 - 140a + 49a^2$; 2) $x^4 + 18x^2y + 81y^2$.

3. Разложите на множители:

1) $(x^2 - 4x)^2 - 16$; 2) $9b^2 - 25c^2 - 3b + 5c$.

4. Сократите дробь $\frac{x^2 - y^2}{(x^2 - xy)^2}$.

5. Может ли при отличных от нуля значениях переменных a и b быть верным равенство $(a - 3b)^2 = a^2 - 9b^2$?

Работа 10

Тема «Вероятность»

1. При проведении 100 экспериментов событие A произошло в 98 случаях. Каким является событие A : вероятным, достоверным, невозможным, маловероятным?

2. Какова вероятность того, что при подбрасывании игровой кости выпадет нечетное число очков?

3. Сколько существует четырехзначных чисел:

1) составленных из цифр 1, 4, 5, 7; 2) кратных 2; 3) кратных 5?

4. Вычислите:

1) $\frac{200!}{198!}$;

2) $\frac{9! + 8! + 7!}{7! - 6!}$.

5. Упростите выражение:

1) $\frac{(k-1)!}{k!}$;

2) $\frac{1}{k!} - \frac{k^2 + k}{(k+2)!}$.

Работа 11

Итоговая контрольная работа

1. Упростите выражение

$$c(3c - 7)^2 - (8c^2 - (3c - 1)(3c + 1)c).$$

2. Сократите дробь

$$\frac{a^2 - 4ab + 3ac - 12bc}{16b^2 - a^2}.$$

3. Решите задачу.

Расстояние между двумя станциями поезд проходит за 40 мин. Если скорость поезда увеличить на 10 км/ч, то он пройдет то же расстояние за 36 мин. Каково расстояние между станциями?

4. Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 5y = -20, \\ x = -1, 2y. \end{cases}$$

5. Докажите, что если n — нечетное число, то значение выражения $(n + 2)^2 - 1$ делится на 8.

ОТВЕТЫ

Глава 1

Математический язык

5. 1) $-0,025$; 2) $-1\frac{11}{12}$; 3) $-11,5$; 4) 15 ; 5) 7 ; 6) $5\frac{7}{15}$. 6. Возможны случаи 2—5. 7. 1) а) 0 ; в) 50 ; д) -14 ; е) 123 . 8. 1) а) $-0,0547965$; б) $-844,07586$; в) $14,07$; г) $-2550,1231$; д) $-504,5030648$; е) $-8,149220$. 9. 1) а) $(3,673 \cdot 3,673 - 1,81) : 13$; в) $(56,12 + 34,79) \times 3,52 - 5,236$; г) $(6,313 \cdot 9,02 + 5,03) : 3,64$. 11. 1) а) $(3 - 3) \cdot 3$ или $(3 - 3) : 3$; б) $(3 + 3) : 3 = 2$ или $3 - (3 : 3) = 2$; в) $3 \cdot 3 : 3 = 3$ или $3 - 3 + 3 = 3$; г) $3 + (3 : 3) = 4$; д) $3 \cdot 3 - 3 = 6$; е) $33 : 3 = 11$; ж) $(3 + 3) \cdot 3 = 18$; з) $33 - 3 = 30$ или $3^3 + 3 = 30$. 12. 1) 16 км; 3) 40 ч; 5) 80 страниц; 6) 270 км. 13. Верные утверждения — а), в). Неверные утверждения — б), г), д). 14. 1) Может, например, $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$. 2) Может, например, $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1$. 3) Не может, так как при сложении целого и дробного числа получается смешанное число. 15. 1) Два числа — 20 и 22 . 2) Четыре числа — 12 , 21 , 11 и 22 . 3) Девять чисел — 11 , 22 , 33 , 12 , 21 , 13 , 31 , 23 , 32 . 4) Шесть чисел — 55 , 66 , 56 , 65 , 50 и 60 . 16. $36 : ((3 + 3) \cdot 3) = 2$; $36 : (3 + (3 \cdot 3)) = 3$; $(36 : 3) + (3 \cdot 3) = 21$; $((36 : 3) + 3) \cdot 3 = 45$. 29. 1) Площадь увеличилась в 64 раза. 2) Объем уменьшился в 64 раза. 3) Длина уменьшится в 14 раз. 4) Длина окружности увеличится на 14π см. 30. 1) а) $16,8$; б) 15 ; в) $5,4$; 2) а) $31,5$; б) $35,1$; в) $52,5$. 31. 1) $\frac{3}{4}$ числа 60 меньше. 2) Числа равны. 34. 1) Нет, например, $|-7| > |-5|$, $-7 < -5$. 2) Можно, из двух отрицательных чисел то число больше, у которого модуль меньше. 35. 1) Может, например, $-3 < -3 + 4 < 4$. 2) Может, например, $-3 + (-4) < -3$ и $-3 + (-4) < -4$. 3) Может, например, $-3 \cdot 5 < -3$ и $-3 \cdot 5 < 5$. 4) Может, например, $1 + 2 > 1 \cdot 2$. 5) Может, например,

- $0 + 0 = 0 \cdot 0$ или $2 + 2 = 2 \cdot 2$. **36.** 1) Нет, это не так, например, для числа -100 . 2) Нет, это не так, например, для числа 0 . **37.** 1) Задумано число -5 . 2) Задумано число 12 . **38.** Число a расположено слева от: 1) -3 ; 2) $3,5$. **39.** 1) $n + 1$; 2) k ; 3) $t - 1$, t , $t + 1$; 4) m , $m + 1$, $m + 2$, $m + 3$. **40.** 1) $2k - 1$; 2) $3n - 1$. **45.** 1) 48 ; 4) -180 ; 7) 43 ; 8) $1,5$. **46.** 5) $-6,9$; 6) 4 . **48.** 1) $60a$ мин; 2) $\frac{b}{60}$ мин; 3) $1000c$ м; 4) $\frac{d}{1000}$ кг; 5) $10\,000k$ см²; 6) $\frac{m}{1000}$ м³. **49.** $\frac{5}{18}n$ м/с. **51.** 1) $-a$; 2) $\frac{1}{b}$; 3) $n + 1$; 4) $m + 1$. **54.** 2) 0 ; 4) 139 ; 6) -30 ; 7) $\approx 0,27378$; 8) $19,64$. **56.** 2) $\frac{d-7p}{4}$ р.; 4) $\left(\frac{p}{2} - a\right)a$ м²; 6) $\left(\frac{a}{6} + \frac{b}{8}\right) \cdot 11$ л. **57.** 1) $200 + 2(a + b)$; 2) $2(a + b) - 200$; 3) а) если $a - b < 100$, то $200 - 2(a - b)$, если $a - b > 100$, то $2(a - b) - 200$; б) $200 + 2(a - b)$. При $b < a < 50$ изменяется выражение 2), при этом получаем $200 - 2(a + b)$, а в задании 3) а) второго случая быть не может. Поскольку все изменения выражаются лишь в порядке вычитания, результат которого должен быть положительным, можно объединить их с помощью знаков модуля: 2) $|2(a + b) - 200|$; 3) а) $|2(a - b) - 200|$. **58.** 1) Два: 1 и -1 . При $a \neq 0$; 2) неотрицательные. При всех значениях a . **59.** 1) а) $c(2b + a - 2c)$; б) $ab + c(a - 2d)$. **60.** 4) $16, 18, 20, 22$; 5) $-2, -1, 0, 1, 2$. **61.** 1) $a^2, -3a$; 3) $a + 1, 2a + 1$. **62.** 1) а) $\frac{3x-4}{2x+6}$; б) $\frac{5}{x} - 2 + x^2$; в) $x^3 - 63 + \frac{4}{x}$; г) $2x - 7(x + 3)$. **64.** 1) $2^*x + 3 = MS$ $4^*x - 2 = ^*MR$; 4) 5^*x $MS - 4/MR = MS$ $2^*x + 5/3 - MR =$. **65.** а) $V \approx 100,5$ м³; б) $V \approx 63,6$ м³. **66.** а) $V \approx 463$ м³; б) $V \approx 346$ м³. **67.** Нет. Число будет составным, например, при $x = 40$ или $x = 41$. **69.** 1) $a : b = 3,5$, или $a = 3,5b$, или $b = a : 3,5$; 6) $\frac{b^2 + c^2}{b + c} = \frac{100}{15}$, $b + c = \frac{15(b^2 + c^2)}{100}$, $b^2 + c^2 = \frac{100(b + c)}{15}$. **70.** 1) $2x - 17 = 75$; 3) $(x + 4) \cdot 5 - 2 = 9 + 4x + 9$. **73.** 1) $(46 - 3x) \cdot 1,5 = 72 - 5x$; 2) $120 - 6x = 1,5(72 - 2,4x)$. **74.** 1) $\left(\frac{x}{15} + 10\right)(15 - 3) + 36 = x$ или $(x + 10)(15 - 3) + 36 = 15x$. **75.** 1) 3 кг чая по цене 220 р. и 1 кг по цене 260 р.; 2) 750 г конфет по цене 110 р. за килограмм и 250 г по цене 150 р. **76.** 1) $5(x + 2,4) = 6,25(x - 2,4)$; 2) $3(5 + x) = 3\frac{2}{3}(5 - x)$. **79.** б) $\left(96 - \frac{x}{3}\right) \cdot 3 = 96 - \frac{1}{3}(96 - x)$. **80.** 1) $\frac{6}{x-1} - \frac{6}{x} = 2$; 2) $(22 + 2)(x + 4) = 22x + 128$; 3) $\left(\frac{200 \cdot 10}{100} + x\right) \cdot 100 = (200 + x) \cdot 20$. **81.** Истинные высказывания:

2), 5), 6). Ложное высказывание: 1). **84.** 7) Множество пар разных по знаку чисел; 8) множество истинности *пусто* — в нем нет ни одного числа. **85.** Равносильны уравнения в заданиях а), б), в), д), ж), з). **86.** 1) $36 - x = 35$; $36 - 35 = x$. **87.** Корнем является число: 7) $-2,6$; 8) $-3,2$. **89.** 1) а) 38; б) 61; в) $-5,2$; г) -1 ; д) нет корней; е) любое число; ж) $\frac{5}{8}$; з) $\frac{1}{11}$; и) $-6,125$; к) $-0,4$. **90.** 1) б) -3 и 2 ; г) $-3, 0,5$ и 5 ; е) $\frac{1}{4}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{5}$. **91.** 1) 4; 2) 8. **92.** Эти уравнения имеют общие корни, следовательно, они равносильны. **93.** Имеют корни уравнения 2) и 4). **95.** 5) 13; 6) нет таких значений y . **96.** 1) 6 лет назад; 2) 30 лет; 3) 34,5 км; 4) 45 лет и 20 лет; 6) 41 км, 36 км, 33 км; 7) 425 кур и 575 кроликов; 8) 11 пятикопеечных монет и 15 трехкопеечных монет; 9) 14 т и 28 т; 10) 13 ответов. **97.** 1) 83 и 84; 2) 132, 134, 136; 3) 95, 97 и 99. **98.** 1) -1 и 2 ; 2) 2,75; 3) $-6,4$; 4) -2 и 4 . **99.** 1) 3; 2) 3. **100.** 2) $x = 8 + b$; 4) $x = \frac{a}{7}$; 6) $x = \frac{10 - a}{b}$; 8) $x = c - \frac{d}{2}$. **101.** 1) 36 гусей; 2) 28 учеников. **103.** 4) $x = 21y - 30$; 6) $y = 1\frac{5}{9}x - \frac{5}{6}$. **104.** Пара целых чисел может быть решением уравнений 3), 4), 5). **105.** Например, 23 и 38. **106.** Например, 3 и 6. **107.** 4) Например, $3x + 5y = -1$. **109.** 3) $2x + y = -0,1$. **110.** 2) (10; 1); 4) нет решения; 6) $(4; 6\frac{2}{7})$. **111.** 2) $a = 7, b = 6$; 4) $p = -1; q = 1$; 6) (3; 0). **112.** 2) $(9\frac{10}{11}; \frac{6}{11})$; 3) (0; -2). **113.** 1) 18,5 и 12,5; 4) (345; 2300); 6) $(\frac{a+b}{2}; \frac{a-b}{2})$. **114.** 1) 23 фазана и 12 кроликов; 2) вол стоит 2 таэла, баран стоит 0,5 таэла. **115.** 1) 20 кг печенья и 18 кг конфет; 2) 100 кг риса и 150 кг пшена. **116.** 1) 10 м^2 ; 2) 1536 м^2 . **117.** 1) 32 ученика и 84 листа бумаги; 2) 30 учеников и 22 стола. **118.** 1) 30 работников; 2) 9,2 флорина. **119.** 1) 55 деталей и 44 детали; 2) 8 л и 10 л. **120.** 1) 20 р. и 30 р.; 2) 200 и 160. **121.** 1) а) 7; б) 7.

Глава 2

Функция

122. а) $y = x(x + 5)$: 1) $x > 0$; 2) $y_1 = 176, y_2 = 84$. в) $y = 160 + 6x$: 1) $0 < x \leq 40$; 2) $y_1 = 172, y_2 = 286$. **123.** а) 1) 10, 11, 12, ..., 98, 99; 2) 1, 9, 6, 15. б) 1) 10, 12, ..., 96, 98; 2) 8, 21, 36, 156. **124.** а) 1) $x \neq 0$; 2) 48, 24, 6, 3. б) 1) $x \neq 1$; 2) $-\frac{5}{3}, -3, 3, \frac{5}{3}$.

- 127.** 1) 2,125; 2) 2; 3) 0,1; 4) $\frac{23}{6}$. **128.** 1) $-7,25$; 2) $-1\frac{2}{39}$. **129.** а) $S = \pi r^2$, $r > 0$; б) $v = \frac{15}{t}$, $t > 0$; в) $v = 15h$, $h > 0$; г) $\alpha^\circ = 180^\circ - x^\circ$, $0^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$; д) $n = 21 + r$, $r = 0, 1, 2, \dots, 5, 6$. **134.** Представим, что эти сосуды наполняются из крана водой под постоянным напором. Чем быстрее поднимается уровень жидкости в сосуде, тем круче вверх поднимается график. Сосуду цилиндрической формы соответствует прямолинейный график. Скорость подъема уровня воды в сосуде конической формы постепенно уменьшается — соответствующий график становится все более пологим. **135.** 2) $\approx 49\%$, $\approx 32\%$. **139.** 1) Натуральные числа, меньше 10; 2) целые числа от 0 до 4. **141.** 1) $y = \frac{13}{21}x$, 26 м; 2) $y = 34x$, 493 р.; 3) $y = 2,2x$, 275 г; 4) $y = \frac{10}{113}x$, 640 см³; 6) $y = 0,18x$, хватит. **145.** 1) Зависимость между переменными y и z задается формулой $y = 15z$, значит, переменные y и z пропорциональны. 2) Из равенства $-0,5x = -1,5z$ получаем $x = 3z$, значит, переменные x и z пропорциональны. **146.** 1) 42 г меди и 28 г цинка; 2) 136 кг меди и 24 кг олова. **147.** Да. 1) $y = -x$; 2) $y = 2x$. **148.** 3) Прямая проходит через все указанные точки, кроме точки C . **149.** 3) Прямая проходит через все указанные точки, кроме точек A и D . **150.** 4) Например, (80; 30); 5) $y = 37,5$; 6) прямая проходит через точки A и B и не проходит через точку C . **152.** 1) $k = 2$; 2) $k = -3$. **153.** $k = -\frac{2}{3}$, $6 = -\frac{2}{3} \cdot (-9)$ — верно, значит, прямая проходит через точку D . **158.** 1) $y = -3x$; 2) $y = -3x$; 3) $y = 3x$. **161.** 1) $V = 240 - 0,1t$; 238,3 м³; 180 м³; 60 м³, 40 мин. 2) $V = 18 - 0,08s$; 16,8 л; 10,8 л. Без заправки горючим автомобиль может пройти 225 км. **162.** 1) $V = 2 + 0,15t$; 2) $H = 10 + 0,5t$. **163.** 1) $k = -6$; 2) $l = -30$. **164.** а) $y = -2x + 10$. **165.** 1) (1; 2,8); 2) (10,5; 18,5). **166.** $t^\circ\text{К} = \frac{5}{9}t^\circ\text{F} + 255\frac{2}{9}$. **167.** 1) Поднят на 1; 2) опущен на 4. **169.** 1) г) Есть. Бесконечное множество точек, абсциссы которых делятся на 7. 2) г) Есть. Бесконечное множество точек, абсциссы которых кратны 4. **170.** 3) а) На k ; б) на $-k$. **171.** 1) $k = 0,3$; $l = 7$; 3) $k = 0,3$; $l = 4,4$; 4) $k = 0,3$; $l = 7,5$. **172.** 1) а) $k = 0,75$; $l = -5$; 2) а) $k = -\frac{3}{7}$; $l = 7$. **174.** 1) $k > 0$, $l > 0$; 2) $k < 0$, $l > 0$; 3) $k > 0$, $l < 0$; 4) $k < 0$, $l < 0$. **175.** 1) Может: $k = 0$, $l > 0$; 2) может: $k < 0$, $l = 0$; 3) может: $k = 0$, $l < 0$; 4) может: $k > 0$, $l = 0$; 5), 6) не может, так как при любом k график функции $y = kx + l$ пересекает ось ординат. **177.** $m = 0,8V + 0,72$. **178.** 1) $n = 1,8 - 0,15t$; 2) $s = 120 - 24t$. **181.** 1) а) (0; 9); (-12; 0); б) принадлежит только точка A ; в) да, это

точка $M(36; 36)$ пересечения графика данной функции с прямой $y = x$. **182.** 1) $l = -21$; прямая проходит через точку B ; 2) $l = 16$; прямая не проходит через точку C . **183.** 1) Нет; 2) да, $(-5; -7)$; 3) нет; 4) да, $(0; 4)$. **184.** 3) $y = -12x + 30$; 4) $y = 46\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$; 6) невозможно. **185.** Прямая 1) параллельна прямой 4), а прямая 2) параллельна прямой 3). **186.** 1) а) $y = 2x + 2$; б) $y = 2x - 2$; в) $y = 2x - 4$; г) $y = 2x + 4$; 2) в) $y = -\frac{1}{3}x + 1$; г) $y = -\frac{1}{3}x - 1$. **187.** 2) Искомая прямая параллельна прямой $y = -x$: в) $y = -x + 2$; г) $y = -x - 2$. **190.** 1) $2x + 3y = 23$. 1 тетрадь и 7 карандашей; 4 тетради и 5 карандашей; 7 тетрадей и 3 карандаша; 10 тетрадей и 1 карандаш; 2) $3x + 5y = 50$; 5 и 7; 10 и 4; 15 и 1 (на первом месте указано число трехкопеечных монет). **191.** Проходит через точки A, B, C . **192.** 1) $c = 5$; 2) $c = -70$; 3) $b = -13,4$; 4) $a = 24$. **195.** 1) $x \approx 6,5, y \approx 3,5$; 3) $x \approx -2, y \approx -2,5$; 5) $x \approx 0; y \approx 0,5$; 7) $x = 3, y = 4$. **196.** Имеет решение: 1), 2), 3); не имеет решений: 4), 5), 6). **197.** 1) Имеет бесконечное множество решений; 2) не имеет решений; 3) имеет единственное решение; 4) имеет единственное решение. **198.** 1) Точка пересечения прямых $(-3; -1)$. Прямая $3x - 8y = -1$ проходит через эту точку. **199.** 1) Да, $x = 6, y = -4$; 2) нет. **200.** 1) $a \neq 0, b = 0, c \neq 0$; 2) $a = 0, b \neq 0, c \neq 0$; 3) $c = 0$, хотя бы одно из чисел, a или b , отлично от нуля; 4) $\frac{c}{b} > 0, \frac{c}{a} < 0$; 5) $\frac{c}{b} < 0, \frac{c}{a} < 0$. **201.** 2) Не являются графиками функции $y = kx + l$ графики следующих уравнений: $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0, 0 \cdot x + 0 \cdot y = 3, x = 0, 2x + 6 = 0$.

Глава 3

Степень с натуральным показателем

203. 1), 2), 3), 7), 8), 9), 10) Да, применен распределительный закон умножения; 5) да, применен переместительный закон умножения. **205.** 1) $60a + 84b$; 2) $3,6a - 0,45c$; 3) $2,4x + 0,016y$; 4) $-0,3ab + 0,5cd$; 7) $5x^2 - 3,5aux - 3\frac{1}{3}x$; 8) $0,48yk + 3,6cy - 0,12y^2$. **206.** 4) $6p - k$; 5) $\frac{1}{12}x - \frac{3}{4}y$; 6) $-1\frac{1}{6}b$. **207.** 2) 7; 4) $7y + 1$; 6) $19a - 203$. **208.** 5) -25 ; 6) $13y$. **212.** 2) b ; 4) $-a$; 6) $\frac{b}{a}$. **213.** 2) c^7 ; 6) $(2a)^5$. **220.** 1) $0^n; 0,5^n; (-2,7)^n, 3^n, 7^n, (-9)^n$; 2) $(-9)^n; (-2,7)^n; 0^n; 0,5^n; 3^n; 7^n$. **221.** 1) n — четное число; 2) n — четное число; 3) n — нечетное число; 4) n — любое натуральное число; 5) n — нечетное число; 6) n — любое натуральное число. **222.** а) $A(x)$ расположена левее B ; б) $A(x)$ расположена

между точками 0 и С; в) $A(x)$ расположена правее точки С.
223. 2) $(-0,7)^3$; $(-0,7)^4$; $(-0,7)^2$. **224.** 2) 10^n . **225.** 4) $1 \text{ т} = 10^6 \text{ г}$.
226. 2) $1,5 \cdot 10^8$. **227.** 1) $2^1 \cdot 3^3$; 2) $2^3 \cdot 3^2$; 3) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^1$; 4) $2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^1$.
229. 2) $-4,41$; 3) -128 ; 4) $-12,8$; 5) $-34,328125$; 6) $5383,9$. **230.** 2) 8^2
или 4^3 ; 6) $(-3)^3$; 7) $(-4)^3$; 8) $\left(\frac{7}{3}\right)^2$. **232.** Верны утверждения 2) и 4).

Контрпримером для задания 1) будет $2^2 = (-2)^2$, но $2 \neq -2$. Контр-
примером для задания 3) будет число $-1 + (-1)^2 = 0$, которое не яв-
ляется положительным. **233.** Верны утверждения 3) и 4).

234. 1) а) 234 506; б) 7 002 001; в) 10 111; г) 90 000. 2) а) $3 \cdot 10^3 +$
 $+ 5 \cdot 10 + 7$; б) $1 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3$; в) $3 \cdot 10^4 + 2$; г) $2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^3 + 4$.

235. 2^{2^2} , 222, 22^2 , 2^{2^2} . **239.** 4) k^{40} ; 8) p^{20} . **243.** 3) 3^9 ; 4) 2^{10} ; 5) 3^{10} .

244. 1) $4,4 \cdot 10^5$; 2) $8,4 \cdot 10^7$; 3) $1,7 \cdot 10^{10}$; 4) $6,2 \cdot 10^{12}$. **245.** 9) x^{17} ;

10) x^{20} . **247.** 1) $(2^2)^{10}$; 2) $(2^4)^5$; 3) $(2^5)^4$; 4) $(2^{10})^2$. **249.** 2) $(b^2)^{30}$, $(b^{10})^6$,

$(b^{15})^4$ и т. д.; 6) 9^{20} ; 3^{40} ; $(3^5)^8$; $(3^{10})^4$ и т. д. **250.** 4) Данные числа рав-

ны. **251.** 2) $(b^2)^3 \cdot (b)^4 = b^{10}$; 5) $(\pm 2a^2)^2(-a)^3 = -4a^7$. **252.** 12) $(0,2)^3 k^{15}$;

16) $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 k^6 x^{21}$. **253.** 2) $3,43 \cdot 10^{17}$; 4) $1,28 \cdot 10^{30}$. **254.** 11) $(2a^2b)^4$;

12) $(3ab^2c^3)^2$. **255.** 3) 1000. **256.** 1) Значение не изменится; 2) значение

переменит знак; 3) значение не изменится. **257.** 3) a^{110} ; 4) d^{4n+1} .

258. 2) 1; 4) $7^8 \cdot 3^{12}$; 6) 13. **259.** 2) $(-b^4)^3$; 3) $(-4c^6)^3$; 4) $(0,08k^{12})^2$.

261. 2) б) 1, 3, 3^2 , ..., 3^{11} . Всего 12 делителей; в) 36 делителей;

г) 121 делитель. **264.** 1) 1440^3 ; 2) $120\,960^2$. **267.** 1) а, г, ж, з, и, к.

2) г) коэффициент 1, степень 10; з) коэффициент -34 , степень 0;

и) коэффициент 1, степень 1; к) коэффициент 0, степень 0.

269. 8) $-\frac{20}{3} x^{16} y^3 p^7$ — одночлен 26-й степени. **270.** 6) $-k^{15} p^{15}$.

271. 1) $(4ab^2)^2$; 5) $(8a^3b^3)^2$ или $(4a^2b^2)^3$; 6) $(-4a^2b^2)^3$. **272.** 5) $M = \pm 3x$;

6) $M = \pm 4by^2$. **273.** 4) $2y \cdot 108y^2$, $y^2 \cdot 216y$, $6y \cdot 36y^2$ и др.

274. б) $(b^2)^2 \cdot (2b)^3$; г) $3^2 \cdot (2x^2y^3)^3$; $(3x^3)^2 \cdot (2y^3)^3$, $(3x^3y^3)^2 \cdot (2y)^3$.

275. 3) $6\frac{13}{42} n^3 p$; 4) $1,4bx^4$. **277.** 3) $-0,5$; 4) $-1,035$. **278.** 10) $-\frac{4y}{7x}$.

279. 7) a^3 ; 8) a^{2n+5} . **280.** 2) $\frac{3^{10}}{3^2}$, $\frac{3^{100}}{3^{92}}$; 6) $\frac{z^m}{z^n}$ или $\frac{z^{m+2}}{z^{n+2}}$. **281.** 3) $n = 29$;

4) $n = 2$. **282.** 9) $\frac{3}{4} p$; 10) $\frac{4}{3a^{12}}$. **283.** 8) $-\frac{3}{n^2 p^{26}}$. **284.** 3) $M = \pm 4a^6 b^{10}$;

4) $M = 4x^4 y^6$. **285.** 7) $\frac{2}{3}$; 8) $\frac{5}{3}$; 9) 3; 10) $\frac{1}{80}$. **286.** 6) $\frac{8}{3}$. **287.** 4) 9 и -9 .

288. 1) $\frac{50}{49}$; 2) $-\frac{4}{9}$.

Глава 4

Многочлены

- 291.** 3) 743 872; 4) 76 599. **292.** 2) $100p + 40 + n$; 4) $1000n + m$.
293. 1) $4x + 7$; 2) $5x^2 + 4x + 1$. **294.** 1) Нет корней; 2) один корень;
3) бесконечное множество корней. **295.** 2) 2; 3) $-4,1$; 4) -1 .
296. 1) 48; 2) 83. **298.** 1) 60; 2) 68. **300.** 1) $M = -6a^2 + 17ab - b^2$;
2) $M = a^2 - 3ab - 6b^2$. **301.** 2) $(11c^2 - 6c + 13) - (9c^2 - 9c + 17) = 2c^2 +$
 $+ 3c - 4$. **302.** Верны высказывания: 1), 3), 5), 6). **303.** 2) $(x^4 - 6) +$
 $+ (8x^3y - x^2y^2 - 3y^4 - 4xy)$. **306.** 1) Только четвертой степени; 2) чет-
вертой, третьей, второй, первой и нулевой. **307.** 1) $3a^3 - 5a^2 + 7a - 8 =$
 $= (a^3 - 7a^2 + 5a - 9) + (2a^3 + 2a^2 + 2a + 1)$. **308.** 4) $2b^2 + 7b - 1 =$
 $= (b^2 + 7b) + (b^2 - 1)$. **309.** 4) $b^2 + b - 10 = (b^2 + 2b) - (b + 10)$.
312. 1) $3c - (2c - 2d) + 2d = c + 4d$; 2) $3c - 2c - (2d + 2d) = c - 4d$.
314. 1) $a^2 \cdot 2a^2b - 2a \cdot a^3b = 0$; 2) $a^2 \cdot 2a^2b : 2a : a^3b = 1$ или $(a^2 \cdot 2a^2b) :$
 $: (2a \cdot a^3b) = 1$. **315.** $4c - 1$. **316.** $p = 2$. **317.** 5. **318.** 7) $-x^6 + 0,75x^5 -$
 $- 0,5x^4 - 0,25x^3$; 8) $-3y^7 + 4,5y^6 - 1,2y^5 + 24y^4$. **319.** 7) $a - 15$; 8) $2n^3$.
320. 1) 0,45; 2) $-1\frac{1}{3}$; 3) 0,058987; 4) $-0,727181$. **321.** 2) $5b^2 - 9b +$
 $+ 15$; 3) $2y + 8$; 4) $p^2 + 14$. **322.** 5) $x = 17$; 6) $p = 23$; 7) $y = -7$;
8) $k = -10$; 9) $x = -12$; 10) $z = -8$. **323.** 1) $x = -9$, $y = 4$; 2) $x = 12$,
 $y = 10$; 3) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{4}$; 4) $x = 4$, $y = 3$. **324.** 1) 75 км; 2) 30 км.
325. 1) 21,6 км/ч; 2) 0,5 км/ч. **326.** 1) 1 ч 50 мин; 2) 15 км.
327. 1) Через 24 мин; 2) 24 км. **331.** 2) $6(2x - y)$; 4) $5b(6y - 7)$;
6) $0,3x(1 + 2x)$; 7) $\frac{y}{25}(3 - 10y)$; 12) $-84a^3(3x^4 + a)$. **332.** 4) $3a^5(3a^3 - 2)$;
9) $5(2a + 3b - 4ab)$; 11) $2x(2x^2 + 4x - 1)$; 12) $a(3a^2 + 15ab - 5b^2)$.
333. 3) $6ab(2a - 30b - 5b^2)$; 6) $cxy(c^2 + c - xy)$. **334.** 13) $(x - y)(x - y + 3)$;
14) $3(2a - 3b)(a - b)$; 15) $2(a - 2)(2a - 3)$; 16) $(x - 8)(16 - 3x)$.
335. 7) $-\frac{4}{3}$; 8) $-\frac{1}{20}$. **336.** 5) $\frac{x}{6}$; 6) $\frac{c}{3}$. **337.** 4) $\frac{1}{c-b}$; 6) $\frac{3x}{y}$. **338.** 1) -81 ;
2) $-2,5$; 3) -5 ; 4) 24. **340.** 5) $x = 1\frac{2}{3}$, $x = 4$; 6) $y = \frac{2}{3}$, $y = 2,5$.
341. 1) 1743; 2) 5; 3) -700 ; 4) 0,2; 5) 1; 6) 5430. **342.** 1) $-3,632$;
 $-3,496$; $-3,544$; $-3,728$; 3) 118,9036; 25,4596; 4,4596; 12,1036.
344. 9) $a^3 - 6a^2 + 11a - 12$; 10) $a^3 - a^2 - 43a - 6$. **345.** 3) $10x^4 +$
 $+ 17x^3y - 12x^2y^2 - 16xy^3 + 8y^4$; 4) $72b^4 - 13b^3 - 107b^2 + 66b - 24$.
348. 1) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$; 4) $6a^3 + 22a^2 + 10a - 6$. **349.** 7) $a^3 +$
 $+ 22a - 28$; 8) $b^3 - 4b^2 + 2$. **350.** 1) 45; 2) 0,1; 3) 12; 4) 2. **351.** 1) 25;
2) 78. **353.** 1) 17, 18, 19, 20; 2) 62, 63, 64; 3) 26 см, 14 см; 4) 10 м, 8 м;
5) 154 дм²; 6) 3234 м². **354.** а) Вторая, $-6x^2$, 20; б) пятая, $-3x^5$, 2;
в) пятая, x^5 , 0; г) четвертая, $3x^4$, 4. **355.** 9) $(a - b)(a - b - 7)$;
10) $(x - y)(1 + x - y)$; 12) $(p - k)(p - k - y)$. **356.** 7) $(x + a)(x - ay)$;
8) $(a - x)(an - x)$; 9) $(a - 3)(a^2 + 2)$; 10) $(3x - 1)(x^2 + 4)$; 11) $(ac + 2) \times$

$\times (5a^2 - 3bc)$; 12) $(xy - 3)(8y^2 - 7a)$. **357.** 1) $(a - c)(n^2 - p + p^2)$; 3) $(c^2 - x)(a - b - c)$; 4) $(y^2 - a)(x - b + 1)$. **358.** 2) $(x + z - y)(x - y + 1)$. **359.** 1) 200; 2) 7000. **360.** 1) 0; 2) 0; 3) $-0,010314$; 4) $2,39775$. **361.** 3) $\frac{x+2}{y-2}$; 4) $\frac{b-4}{a+3}$; 5) $\frac{a-3}{b+3}$; 6) $\frac{y-1}{x+1}$. **362.** 5) $x = 5$; 6) $y = 0, y = 2, y = 1, y = -1$. **363.** 4) $36y^5 - 54y^4 + 10y - 15 = (2y - 3)(18y^4 + 5)$. **364.** 1) 350 км; 2) 10 км; 3) 80 км; 4) 17 км. **365.** 1) $(x - 1)(x^n + 1)$; 2) $(x - 2)(x^{n-1} - 2)$. **369.** 4) $2 \cdot 0,75a^2b$; 5) $2 \cdot 0,5c^3d$; 6) $2 \cdot \frac{1}{6}n^4m^3$. **370.** 2) Может; 4) не может. **371.** Не может. **372.** 1) 26; 2) 45; 3) 4; 4) 208. **374.** 1) Неправильная; 2) неправильная; 3) неправильная; 4) правильная. **376.** 7) $(6a - 7c)^2 = 36a^2 - 84ac + 49c^2$; 8) $(5x + 8y)^2 = 25x^2 + 80xy + 64y^2$. **377.** 12) $\frac{1}{16}x^6 + x^3y^2 + 4y^4$. **378.** 2) Невозможно; 7) невозможно; 9) $((a + b) + 2a)^2$ или $(3a + b)^2$; 12) невозможно. **379.** 4) $16a^4$; 5) $48py^4x$ или $-48py^4x$. **380.** 7) 12 и -2 . **381.** 7) $p^4 - 18p^2 + 81$; 8) $10\,000 - c^8$. **383.** 3) $\frac{a+10}{a-10}$; 6) $\frac{c+4}{c-4}$; 9) $\frac{c^2}{x^2}$. **384.** 6) $-4a$. **387.** 4) $\frac{3p-2q}{4q-3p}$. **388.** 3) $1431 = 1600 - 169 = (40 - 13)(40 + 13) = 27 \cdot 53 = 33 \cdot 53$. **393.** Площадь квадрата на 100 см² больше площади прямоугольника. **394.** 1) $x = 0, x = 1, x = -1$; 5) $x = 1, x = 5, x = -5$. **395.** 4) $-\frac{1}{4}a^4b^4$. **398.** 1) $b^2 + (a - 3)^2$; 5) $(b - c)^2 + (c + 7)^2$; 6) $(2n + y)^2 + (n - 4)^2$. **399.** 1) 64 и -196 ; 2) -484 и -676 . **400.** 1) $(5x - 2)^2$; 2) $(8x + 7)^2$. **401.** 1) $x = 0, y = 0$; 2) нет решений. **402.** (0; 0), $(-2; -2)$, (0; -1), $(-2; -1)$. **404.** 1) 16, 17 и 18; 2) 6, 7 и 8. **407.** 3) Наименьшее значение выражения пункта 1) при: а) $a = -2$; б) $b = -\frac{3}{2}$. **409.** 6) $3ab^2c(20abc^2 - 7)(20abc^2 + 7)$. **410.** 3) $8(a - 2)(a + 8)$; 5) $(a - 2b)(a + 2b)(a + 6b)^2$; 6) $(2 - y^3)(2 + y^3)(2 - 3y^3)^2$. **411.** 5) $(a + 3b) \times (a - 3b - 3)$; 7) $(b + c)(2b - 2c - 5)$. **412.** 5) $(b + c + 7)(b - c - 7)$; 7) $(ax - b - c)(ax - b + c)$; 8) $(p + ky - x)(p + ky + x)$. **413.** 2) $(a + x - b - y)(a + x + b + y)$; 4) $(ab + cd - ac + bd)(ab + cd + ac - bd)$. **414.** 2) $\frac{x+y-4}{x+y}$; 3) $\frac{b-c-1}{b-c}$; 5) $\frac{a+c}{c-b-a}$; 6) $\frac{a+b+5}{-a-5}$. **417.** 7) $x = -2, x = -3, x = 3$; 8) $y = -2, y = 2, y = 3$. **419.** 1) Рис. 70. 2) а) $(\frac{3}{4}; 0)$, (0; -3); б) (0; -1), с осью абсцисс график не имеет общих точек.

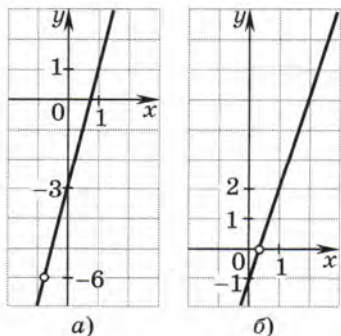


Рис. 70

Глава 5

Вероятность

- 424.** 1) 6; 2) равновероятны, если игральная кость честная.
- 425.** 1) 36 возможностей; 2) а) равновероятны; б) равновероятны; в) нет, более вероятно вытащить карту бубновой масти.
- 426.** 1) 6 возможностей; 2) а) равновероятны; б) более вероятно вытащить красный шар.
- 427.** 1) а) 100 возможностей; б) 55 возможностей; в) 45 возможностей. 2) Менее вероятно возможность купить невыигрышный билет.
- 428.** От двух до 12 очков. Возможности не равновероятны.
- 429.** 1) 100 способами; 2) а) 20 возможностей; б) 80 возможностей.
- 432.** Из колоды вынули какую-либо карту. Из 36 возможностей.
- 433.** 0,01. **434.** 0,2. **435.** 0,3. **436.** $\frac{3}{4}$. **437.** 0,2.
- 439.** 1) 0,4; 2) 0,6. **440.** $\frac{1}{3}$. **441.** 1) PPP, PPO, POP, OPP, POO, OPO, OOP, OOO; 2) а) $\frac{1}{8}$; б) $\frac{1}{8}$; в) $\frac{7}{8}$; г) $\frac{3}{8}$. **442.** Всего есть шесть равновероятных возможностей расставить три книги на полке. 1) $\frac{1}{6}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{2}{3}$. **443.** 1) $\frac{1}{18}$; 2) $\frac{1}{12}$; 3) $\frac{1}{12}$; 5) 0,5; 6) 0,5. **444.** Наибольшая вероятность выпадения в сумме 7 очков. Она равна $\frac{1}{6}$. **445.** 240.
- 446.** 12 маршрутов. **447.** 1) а) 6 членов; б) 12 членов; 2) а) 4; -7; б) 36; -40. **448.** 1) а) 4 делителя; б) 16 делителей; в) 32 делителя; г) $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_m + 1)$. 2) а) Простое число; б) квадрат простого числа. **449.** 1) а) $n!$ способами, где n — число учеников вашего класса; б) $6! = 720$ способами. **450.** 1) 24 числа; 2) а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $\frac{1}{3}$; г) 0.
- 451.** 96 чисел. **452.** 24 способами. **453.** 6 стран. **454.** 8) 19 600; 9) $\frac{1}{6}$; 10) 15. **455.** 5) $\frac{999!}{998!} < \frac{1000!}{999!}$; 6) $\frac{500!}{498! \cdot 12} > \frac{500!}{499! \cdot 3!}$. **456.** Верно 1), 3), 4), 6). **457.** В заданиях 1), 2), 4) ответ «да». **458.** 1) Три нуля.
- 459.** 1) $\frac{1}{(n-1)n}$; 2) $k(k+1)$; 3) $2n(2n+1)$; 4) $\frac{3m(3m-1)}{2}$. **460.** 1) $n = 17$; 2) $n = 11$; 3) $n = 10$; 4) $n = 10$. **461.** 1) а) 24 способа; б) 24 360 способов. **462.** 24 страны. **463.** 1) $C_{14}^2 \cdot 12 = 1092$; 2) $C_{14}^{11} = 364$; 3) $C_{13}^{10} = 286$. **464.** 1) 98 способов; $\frac{98}{A_{99}^2} \approx 0,01$; 2) $\frac{25}{99} \approx 0,25$; 3) $\frac{19}{99} \approx 0,2$.
- 465.** 1) а) $C_7^3 = 35$ способов; б) $C_{25}^3 = 2300$. **466.** 1) $C_{10}^2 = 45$ партий;

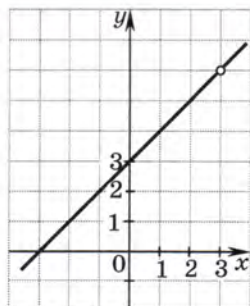
- 2) 5 человек. **467.** 1) 78; 2) 230300; 3) 715; 4) $\frac{13}{17}$; 5) $\frac{5}{12}$. **468.** 1) $\frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} \approx 0,5$; 2) $\frac{5C_{20}^2}{C_{25}^3} \approx 0,4$. **469.** 1) $x = 7$; 2) $x = 4$; 3) $x = 7$; 4) $x = 59$.
- 470.** 1) а) $\frac{1}{32}$; б) $\frac{5}{32}$; 2) $\frac{5}{16}$; 3) а) $\frac{1}{128}$; б) $\frac{7}{128}$; в) $\frac{C_7^0}{128} = \frac{1}{128}$; г) $\frac{21}{128}$; д) $\frac{21}{128}$; е) $\frac{35}{128}$. **471.** 1) $\frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$; 2) $\frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}$; 3) $\frac{12}{C_7^2} = \frac{4}{7}$. **472.** 1) $P_4 = 24$.
- 2) $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{P_4} = \frac{1}{3}$. **473.** 1) A_{10}^7 ; 2) 107. **474.** A_{11}^6 . **475.** 1) 20 чисел; 2) 180 чисел; 3) 900; 4) 900. **476.** $A_4^2 = 12$ словарей. **477.** $C_{49}^6 = 303\,996$. **478.** $11^3 \cdot 10^4 = 13\,310\,000$. **479.** $100C_{99}^2 \cdot C_{97}^3$. **480.** 4608.

Глава 6

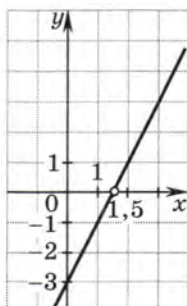
Повторение

- 481.** 1) 50; 2) 1236; 3) 1; 4) 1. **482.** 1) 0,5; 2) $-\frac{2}{3}$; 3) $\frac{1}{4}$; 4) -2; 5) 0,5; 6) -0,13; 7) 0,72; 8) 0,25; 9) -1; 10) 0,25; 11) 1; 12) 0. **483.** 2) 1; 4) $\frac{5}{8}$.
- 486.** 1) Может при $a = -1$, $b = 0$; 2) может при $a = -1$, $b = 0$; 4) может при $a = -1$, $b = 1$. **487.** 1) 0,25; 2) -26,5; 3) $2\frac{5}{12}$; 4) 75,6. **488.** 1) $2\frac{1}{9}$; 2) 0,2; 3) $-4\frac{4}{9}$; 4) 2,5; 5) 0,1; 6) 12. **489.** 1) 70 кг; 2) ≈ 61 кг.
- 490.** 1) 2972; 2) 534; 3) $((x - 7)x - 26)x + 130$; 4) 121,2256; 4) 2296,6071. **491.** 1) $A = \left(\frac{n}{t} + \frac{m}{T}\right)x$ деталей; 2) $x = Q : \left(\frac{V}{a} + \frac{W}{b}\right)$ ч; 4) $S = x\left(t + \frac{d}{y}\right) + d$ км; 5) $T = \frac{ut}{v - u}$ ч; 6) через $\frac{s}{u + v}$ ч; $d = s - v \cdot \frac{s}{u}$.
- 496.** 1) Шесть; 2) равны. **497.** На 99. **498.** 1) а) Нечетным; б) четным; 2) а) четным; б) четным; 3) а) четным; б) нечетным; 4) а) нечетным; б) четным. **499.** 2520. **501.** 1) Три нуля; 2) в частном получится 103 681, а в остатке 29. **502.** а) $n > k$; $|n| > |k|$; б) $n > k$; $|k| > |n|$. **503.** 1) $b > a$, так как точка b расположена правее. 2) Установить, какое из данных чисел имеет больший модуль, невозможно: если 0 расположен ближе к a , то $|b| > |a|$, если ближе к b , то $|a| > |b|$, если на равном расстоянии от a и b , то $|b| = |a|$. **504.** 1) Все координаты уменьшаются на 3; 2) все координаты увеличатся на 4. **505.** 1) Уменьшились на 10; 2) а) увеличились на 10; б) уменьшились на 10;

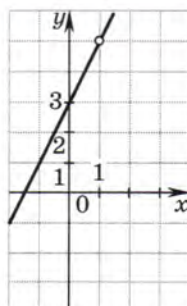
- 3) да, число 5. **506.** а) $p > 0, q > 0$; б) $p < 0, q > 0$; в) $p < 0, q < 0$.
- 508.** 1) а) $A_1(-5; -3), B_1(1; -7), C_1(3; 1)$; б) $A_1(5; 3), B_1(-1; 7), C_1(-3; -1)$; в) $A_1(5; -3), B_1(-1; -7), C_1(-3; 1)$; 2) а) $K_1(-6; 0), M_1(0; -4), N_1(2; -8)$; б) $K_1(6; 0), M_1(0; 4), N_1(-2; 8)$; в) $K_1(6; 0), M_1(0; -4), N_1(-2; -8)$.
- 509.** 1) $D(-2; -3), S_{ABCD} = 10 \cdot 12 = 120$; 2) (3; 1), (3; 7) или (-9; 1), (-9; 7).
- 510.** 1) (4; -7), (9; -7) и (9; -2); 2) (-1; -2), (-1; 3) и (4; 3).
- 511.** 1) Все точки расположены в правой полуплоскости на расстоянии 3 от оси ординат; 2) а) прямую; б) прямую; в) ось ординат; г) ось абсцисс; д) правую координатную полуплоскость; е) нижнюю координатную полуплоскость; ж) вторую координатную четверть, биссектрису первого и третьего координатных углов.
- 512.** 1) Полуплоскость, расположенную справа от прямой $x = 3$; 2) полуплоскость, расположенную сверху от прямой $y = -4$; 3) две полуплоскости, расположенные справа от прямой $x = 1$ и слева от прямой $x = -1$; 4) полоса между прямыми $x = 1$ и $x = -1$; 5) две полуплоскости, расположенные сверху от прямой $y = 2$ и снизу от прямой $y = -2$; 6) полоса между прямыми $y = -2$ и $y = 2$.
- 521.** 5) Не обязательно. Лодка могла двигаться по окружности, центром которой является причал.
- 522.** 9) Нет. Расстояние между яхтой и катером можно найти по графику только в первые 20 мин и последние 10 мин плавания яхты, так как в это время катер стоял у причала и расстояние до яхты практически отмерялось от него.
- 526.** 2) -0,5;
- 4) 70.
- 527.** 1) $k = -\frac{8}{5}, l = 8$; 2) $k = \frac{6}{7}, l = -6$.
- 528.** 1) $k = 1, l = 2$;
- 3) $k = 1, l = 0$; 4) $k = \frac{1}{3}, l = 4\frac{1}{3}$.
- 529.** 1) $k = 3, l = -5$; 2) $k = -\frac{1}{3}, l = \frac{5}{3}$.
- 530.** а) $k = -2, l = -2$; б) $k = \frac{2}{5}, l = -2$; в) $k = \frac{4}{3}, l = 4$; г) $k = -1, l = 4$.
- 532.** а) Рис. 71, а; б) рис. 71, б; в) рис. 71, в.
- 533.** в) Рис. 72, а; г) рис. 72, б.
- 534.** 1) Да; 2) нет.
- 536.** 1) $-5a^{10}b^8$; 2) $4a^{10}x^8$; 3) $-32x^{18}y^9$; 4) $x^8k^6n^{14}$.
- 538.** 3) $a^3 - 12a - 16$; 4) $2b^3 - 27b^2 + 108b - 108$.
- 539.** 2) $100a^3$; 3) $62nk^2$; 4) $2a^2x$.
- 540.** 4) $64a(16a^2 + 1)$; 8) $(xy - 3) \times (8y^2 - 7a)$; 10) $16(x - 4y)(x + y)$; 11) $a(a - 1)(a - 5)$.
- 542.** 6) $2(2x + 3y) \times (9y - 4x)$; 9) $(a + b)(a - b)(x + y)(x - y)$; 10) $(a - b)(a + b - y) \times (a^2 - ay - by + b^2)$; 12) $(a + b + c + d)(a - b + c - d)(c + d - a - b) \times (c - d - a + b)$.
- 543.** 3) При $k = 74$ и $k = -178$; 4) при $k = 720$ и $k = -320$.
- 544.** 7) $\frac{a+3}{x+2}$; 8) $\frac{b+4}{y+5}$.
- 545.** 1) $\frac{a-2}{a+12}$; 2) $\frac{1-b}{b+5}$;
- 3) $\frac{x+y+5}{x+y-5}$; 4) $\frac{a-b}{b+c}$; 5) $\frac{a-b}{a-b+c}$; 6) $\frac{x-y-z}{x-y}$.
- 551.** 1) 8, 9 и 10; 2) 7 и 8.
- 552.** 1) а) Шестая; б) четвертая; в) шестая; г) шестая; 2) а) 49; б) -1; в) 9; г) 1.
- 553.** $p = 2$.
- 554.** 1) $y = -12$; 2) $y = -4$; 3) $x = 0,5$; 5) $x = -0,1$; 6) $x = -0,505$.
- 555.** 1) $x = 0$; 2) $x = 12$; 3) $x = 7$; 4) $y = 10$.



а)

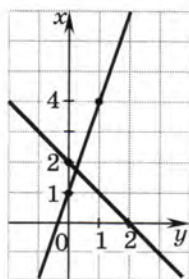


б)

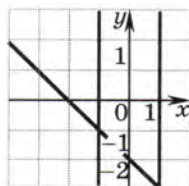


в)

Рис. 71



а)



б)

Рис. 72

556. 1) $y = 0$, $y = -20$; 2) $x = 0$, $x = 15$; 3) $p = 0$, $p = 0,5$; 4) $q = 0$, $q = -1,5$; 5) $x = -11$, $x = 11$; 6) $x = 2$, $x = -2$; 7) $y = \frac{6}{70}$, $y = -\frac{6}{70}$; 8) $x = 5$, $x = -5$; 9) $x = 2$, $x = 8$; 11) $z = 5$; 12) $x = -3$, $x = -2$, $x = 3$.

558. 1) $x = 10$, $y = 0$; 2) $x = -1\frac{1}{7}$, $y = -\frac{6}{7}$; 3) $x = -\frac{1}{3}$, $y = -2$; 4) $x = 4$, $y = 13$; 5) $x = \frac{1}{6}$, $y = -3$; 6) $x = 2,3$, $y = \frac{7}{6}$.

559. 1) $x = 5$, $y = 7$; 2) $x = 8$, $y = 7$.

560. 1) Нет; 2) да, $x = 10$, $y = 1$.

561. 1) $x = 3a - 3b$, $y = -2a$; 2) $x = a - 6b$, $y = 2a + b$.

562. 1) $x = 25$, $y = 21$; 2) $x = 33$, $y = 17$; 3) $x = 41$, $y = 16$; 4) $x = 27$, $y = 13$.

563. 1) $x = -2$, $y = 3$, $z = 5$; 2) $x = -2$, $y = 1$, $z = 3$.

564. 1) 25 км; 30 км; 22 км; 2) 2100 человек, 1400 человек, 1050 человек.

565. 1) 5 кг и 14 кг; 2) 8 кг и 15 кг.

566. 1) 260 коров; 2) 6,8 т.

567. 1) 25 т, 15 т; 2) 60 т, 40 т.

568. 1) 8,4 л, 11,2 л; 2) 8 кг, 6 кг.

569. 1) 1200 м³; 2) 224 га.

570. 1) 12 дней; 2) 60 станков и 50 станков.

571. 1) 18 900 ц, 19 200 ц;

2) 2250 ц, 2400 ц. **572.** 1) 0,7 т и 0,4 т; 2) 25 дней. **573.** 1) 86,1 кг и 18,9 кг; 2) 2 кг; 3) 20 м³ и 40 м³. **574.** 1) 600 и 250. **575.** 1) 150 ч и 100 ч; 2) за 10 ч и за 15 ч. **576.** 1) 196 м²; 2) 2400 м². **577.** 1) 24 км и 21,25 км; 2) 30 км и 36 км. **578.** 1) 24 км и 30 км; 2) 10 км и 18 км. **579.** 1) 160 км и 240 км; 2) 54 км и 24 км. **580.** 1) 4,5 км/ч; 2) 30 м/мин. **581.** 1) 190 км; 2) 6 км. **582.** 1) В 11 ч 24 мин, в 224 км от В; 2) в 10 ч 30 мин. **583.** 1) 90 км; 2) 576 км. **584.** 1) 4,5 км/ч, 5,5 км/ч; 2) 5 км/ч, 11 км/ч. **585.** 1) 16 см, 6 см; 2) 10,5 м; 13,125 м; 3) 4 м, 5 м. **586.** 1) 8 ч 43 мин 38 с; 2) на 1 мин 22 с. **587.** 48 ч. **588.** Через 4 года. **589.** Верно решено 12 задач, а в 8 допущена ошибка. **590.** Подбором находим, что в аквариуме живут 4 осьминога и 5 кальмаров. **591.** 35 миль. **592.** 9. **593.** Цена лошади 25 монет. **594.** 84 года.

Практикум по решению текстовых задач

1. 1300 м³. **2.** 1120 га. **3.** 429 деталей. **4.** Через 4 дня. **5.** 150 л и 50 л. **6.** 78 т и 52 т. **7.** 86,1 кг и 18,9 кг. **8.** 2 кг. **9.** 3 кг. **10.** 1440 м². **11.** 5000 дм². **12.** 221 см². **13.** 121 км. **14.** 6 км. **15.** 24 км. **16.** 24 км и 30 км. **17.** 18 км и 10 км. **18.** 21,25 км и 24 км. **19.** 17 км. **20.** 32 км и 14 км. **21.** 26 км. **22.** 36 л и 48 л. **23.** 15 книг и 17 книг. **24.** 7500 р. и 12 000 р.

Проверь себя!

Домашние контрольные работы

Работа 1. 1. 1. 2. $3\frac{1}{3}$. 3. $35 - 2(u + v)$ км.

5. 1) Нет; 2) да, например, $-0,1 < (-0,1)^3$.

Работа 2. 1. $x = -8$, $x = 0$, $x = 9$. 2. $x = 7$, $y = -2$.

3. 8,5 см и 6,5 см. 4. 60 и 20. 5. 48.

Работа 3. 1. 1) -90 ; 2) 0,592; 3) $1\frac{41}{45}$. 3. Да, $x = -11$. 5. $y = \frac{1}{3}x$.

Работа 4. 1. График проходит через точку А. 4. Не пересекаются.

Работа 5. 2. 1) a^{35} ; 2) b^{104} ; 3) $-64c^6$; 4) $\frac{16}{81}d^{12}$. 3. 1) $2^5 \cdot 2^7 = 4^6$; 2) $2^8 \cdot 2^9 < 8^6$. 4. 1) $6,4 \cdot 10^{13}$; 2) $2,88 \cdot 10^{41}$. 5. 225 мин.

Работа 6. 1. 4 $\frac{1}{6}a^7x^{14}$. 2. 1) $\frac{8b^2}{5a^3}$; 2) x^4 . 3. 1) $x = -\frac{2}{3}$, $x = \frac{2}{3}$;

2) $x = 5$. 4. $a^2 < a < \frac{1}{a}$.

Работа 7. 1. $3ab + b^2$. **2.** $(a^4 + 2a^2) - (3a^3 - 5a + 9)$. **4.** $x = 0, x = 2$.

Работа 8. 1. $-a^2 - 27a + 30$. **2. 1)** $(3x - 5y)(3 - 4xy)$;

2) $4(3a - 4)^2(a - 1)$. **3.** 225 см^2 . **4.** $y = 2$.

Работа 9. 1. 1) $11x^2 - 84x + 98$; 2) $23y^2 + 12y - 36$.

3. 1) $(x - 2)^2(x^2 - 4x - 4)$. **4.** $\frac{x + y}{x^2(x - y)}$. **5.** Да, например, $a = 3b$.

Работа 10. 2. $\frac{1}{2}$. **3. 1)** 256; 2) 4500; 3) 1800. **4. 1)** 39 800;

2) 94,5. **5. 1)** $\frac{1}{k}$; 2) $\frac{2}{k!(k + 2)}$.

Работа 11. 1. $18c^3 - 50c^2 + 48c$. **3.** 60 км. **4.** $x \approx -2,5, y \approx 2$.

СОВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

Глава 1

Математический язык

2. Совет. Достаточно найти значение делителя.

12. Решение. 1) $60 - (12 + 10) \cdot 2$ (км);

3) $19600 : \left(\frac{1000}{4} + \frac{1200}{5} \right)$ ч; 5) $\frac{220 \cdot 20}{100 - (20 + 25)}$ страниц;

6) $\frac{(100 - 30 - 25) \cdot 600}{100}$ км.

13. Решение. Утверждение б) неверно потому, что разность двух одинаковых чисел равна нулю, а число нуль не натуральное. Утверждение г) неверно, потому что частное двух натуральных чисел может быть дробным, например $3 : 2 = 1,5$. Утверждение д) неверно, потому что квадрат нуля равен нулю, а число нуль не является положительным.

29. Решение. 1) Обозначим сторону квадрата буквой a . Если ее увеличить в 8 раз, то получим сторону нового квадрата, равную $8a$. Запишем площадь старого и нового квадрата: $S_1 = a^2$, $S_2 = (8a)^2 = 64a^2$. Видно, что площадь увеличилась в 64 раза.

2) Обозначим сторону куба буквой a , тогда его объем равен $V_1 = a^3$. Уменьшим сторону куба в 4 раза, она будет равна $a : 4$. Найдем объем нового куба: $V_2 = (a : 4)^3 = a^3 : 64$. Сравним a^3 и $a^3 : 64$. Значит, при уменьшении стороны куба в 4 раза объем уменьшился в 64 раза.

3) Длина окружности равна $C_1 = 2\pi r$, где r — радиус. Уменьшим радиус в 14 раз, получим $r : 14$. Подставим его

значение в формулу длины окружности и получим: $C_2 = \frac{2\pi r}{14}$.

Видно, что при уменьшении радиуса окружности в 14 раз ее длина уменьшится тоже в 14 раз.

37. Решение. 1) Чтобы модули чисел были равны, они должны находиться на одинаковом расстоянии от нуля. Расстояние между этими числами по условию задачи равно 10, а ноль находится в середине этого отрезка. $10 : 2 = 5$, следовательно, одно число равно 5, а второе -5 . Проверим: $-5 + 10 = 5$, $|-5| = |5| = 5$. Задумали число -5 .

42. Совет. Полезно помнить, что многочлен имеет смысл при всех значениях входящих в него переменных, дробно-рациональные выражения имеют смысл, когда знаменатели отличны от нуля.

67. Совет. Подумайте, при каких значениях x число будет раскладываться на множители, следовательно, не будет простым.

75. Решение. 1) Стоимость 4 кг дорогого чая 1040 р., а смеси — 920 р., т. е. на 120 р. дешевле. Замена одного килограмма дорогого чая на 1 кг дешевого уменьшает стоимость на 40 р. Значит, дешевого чая в смесь нужно положить 3 кг ($120 : 40 = 3$). Получаем уравнение: $220x + 260(4 - x) = 230 \cdot 4$.

2) Цена 1 г дорогих конфет составляет 0,15 р., а менее дорогих конфет — 0,11 р. Пусть взяли x г дорогих конфет, тогда дешевых $1000 - x$. Теперь составим уравнение: $0,15x + 0,11(1000 - x) = 120$.

85. Решение. 1) д) Второе уравнение получено умножением первого на x . При этом мог появиться лишний корень $x = 0$. Однако 0 не является корнем второго уравнения, значит, оно равносильно исходному. е) Второе уравнение получено умножением первого на $x + 2$. При этом появится лишний корень $x = -2$. Значит, уравнения не являются равносильными.

95. Совет. Решите уравнение: 5) $4y - 47 + 10 = y + 2$; 6) $2(6y - 19) = 12y - 1$.

97. Совет. 2) Составьте уравнение, используя записи трех последовательных четных чисел $2n - 2$, $2n$, $2n + 2$ и решите его. 3) Составьте уравнение, используя записи трех последовательных нечетных чисел $2n - 1$, $2n + 1$, $2n + 3$, и решите его.

98. Совет. Замените уравнение с модулем двумя уравнениями без модуля: 1) $2x - 1 = 3$ и $2x - 1 = -3$; 2) $3x + x = 11$ и $3x - x = 11$; 4) $7 - x = 2x - 5$ и $7 - x = 5 - 2x$ и решите их.

99. Совет. Подставьте корень в уравнение и решите его относительно переменной a .

101. Совет. 2) Решите уравнение $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{7} + 3 = x$, где x — число учеников Пифагора. Можно подобрать корень уравнения, зная, что оно натуральное и кратно числам 4 и 7.

104. Решение. 1) Не может, потому что левая часть уравнения при целых значениях переменных делится на 4, а правая нет. 2) Не может, потому что левая часть уравнения при целых значениях переменных делится на 13, а правая — нет. 3) Может, например, $x = -4$, $y = 3$. 4) Может, $x = y = 0$ или $x = -9$, $y = 7$. 5) Может, например, $x = 3$, $y = 0$. 6) Не может, потому что левая часть уравнения при целых значениях переменных делится на 2, а 17 не делится на 2.

118. Решение. 2) Пусть ежемесячный заработок равен x флоринов, а одежда стоит y флоринов. Тогда:
$$\begin{cases} y + 10 = 12x, \\ y + 2 = 7x. \end{cases}$$

$$5x = 8, x = \frac{8}{5}, y = \frac{7 \cdot 8}{5} - 2, y = 9,2.$$

Ответ: 9,2 флорина.

119. Совет. 2) Необходимо решить систему уравнений
$$\begin{cases} 8(x + y) + 6x = 192, \\ 5(x + y) + 7x = 146, \end{cases}$$
 где x л воды подает горячий кран за 1 мин, y л воды подает холодный кран за 1 мин.

120. Совет. 2) Необходимо решить систему уравнений
$$\begin{cases} 0,3a - 0,25b = 20, \\ 0,3b - 0,2a = 8, \end{cases}$$
 где a и b искомые числа.

Глава 2

Функция

138. Совет. Для заполнения таблицы и построения графика используйте функцию: 1) $d = 2100 - 35t$; 2) $s = 10 - 4t$.

145. Решение. 1) Известно, что зависимость между переменными x и y выражена формулой $y = 2,5x$, а зависи-

мость между переменными x и z выражена формулой $x = 6z$. Подставим значение x в первую формулу и получим зависимость между переменными y и z :

$$y = 2,5x = 2,5 \cdot 6z = 15z.$$

Пропорциональны.

146. Решение. 1) Если x кг — масса цинка, тогда масса меди $(70 - x)$ кг. Так как известно, что масса цинка относится к массе меди как $2 : 3$, можно составить уравнение $\frac{x}{70 - x} = \frac{2}{3}$.

По правилу пропорции находим, что $3x = 140 - 2x$, $5x = 140$, $x = 28$ (кг) — масса цинка, $70 - 28 = 42$ (кг) — масса меди.

Ответ: масса цинка 28 кг, масса меди 42 кг.

154. Решение. Составим равенство отношений одноименных координат точек: $\frac{-12}{8} = \frac{-15}{10}$.

Равенство верное, значит, данная прямая проходит через точку E .

164. Совет. а) Составьте и решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3k + l = 4, \\ 5k + l = 0. \end{cases}$$

165. Решение. 2) $\frac{4x - 5}{2} = \frac{24 + 3x}{3}$, $12x - 15 = 48 + 6x$, $6x = 63$, $x = 10,5$. $f(10,5) = \frac{4 \cdot 10,5 - 5}{2} = 18,5$.

166. Решение. Выразим из формулы $t^{\circ}\text{F} = 1,8t^{\circ}\text{C} + 32$ температуру по Цельсию $1,8t^{\circ}\text{C} = t^{\circ}\text{F} - 32$, $t^{\circ}\text{C} = \frac{5}{9}t^{\circ}\text{F} - 17\frac{7}{9}$ и подставим в формулу температуры по Кельвину. В результате получим $t^{\circ}\text{K} = \frac{5}{9}t^{\circ}\text{F} + 255\frac{2}{9}$.

171. Совет. $k = 0,3$, а значение l найдите, подставив в уравнение $y = 0,3x + l$ координаты данной точки.

185. Совет. Выразите из уравнений y через x и сравните угловые коэффициенты прямых.

193. Совет. Можно либо найти координаты точки пересечения прямых, либо подставлять координаты данной точки в уравнения прямых.

Степень с натуральным показателем

204. Решение. 1) Областью допустимых значений равенства $a^2 + a = a^3$ являются все числа, однако при $a = 1$ равенство $1^2 + 1 = 1^3$ становится неверным, так как $2 \neq 1$.

7) Областью допустимых значений равенства $\frac{5|a|}{-a} = -5$ являются все числа, кроме $a = 0$, однако при $a = -1$ равенство становится неверным: $\frac{5|-1|}{-(-1)} = -5$, $5 \neq -5$.

233. Совет. Последняя цифра степени находится по последней цифре натурального числа в основании степени. Переберите все цифры.

238. Решение. 1) Проверим формулу при $n = 2$. Пирамида состоит из двух дисков: большого (Б) и маленького (М). Перемещение 1: перенос М на вспомогательный стержень. Перемещение 2: перенос Б на нужный стержень. Перемещение 3: перенос М на нужный стержень. Для двух дисков понадобилось три перемещения. $3 = 2^2 - 1$.

Проверим формулу при $n = 3$. Сначала за три перемещения перенесем на вспомогательный стержень два верхних диска. Затем перенесем на нужный стержень нижний, самый большой из дисков. Наконец, еще тремя перемещениями перенесем два диска со вспомогательного стержня на нужный. Итого нам потребовалось:

$$3 + 1 + 3 = 7 = 2^3 - 1.$$

Заметим, что

$$3 + 1 + 3 = 3 \cdot 2 + 1 = (2^2 - 1) \cdot 2 + 1 = 2^3 - 2 + 1 = 2^3 - 1 = 7.$$

Аналогичные рассуждения для $n = 4$ приведут к выражению

$$7 + 1 + 7 = 7 \cdot 2 + 1 = (2^3 - 1) \cdot 2 + 1 = 2^4 - 2 + 1 = 2^4 - 1 = 15 \text{ и т. д.}$$

2) **Решение.** 1. $2^{64} - 1 = (2^{32})^2 - 1 = (2^{32} - 1)(2^{32} + 1) = ((2^{16})^2 - 1)(2^{32} + 1) = (2^{16} - 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = ((2^8)^2 - 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = (2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \times (2^{32} + 1) = (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1) = 15(2^4 + 1)(2^8 - 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1).$

Поскольку один из множителей кратен 5, а другие являются натуральными числами, все произведение кратно 5.

Решение 2. При последовательном возведении 2 в степень с показателями 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... последней цифрой результата будут 2, 4, 8, 6, 2, 4, ... Цифры повторяются, причем на 4-м, 8-м, 12-м, ..., 60-м и 64-м месте оказывается 6. Значит, 2^{64} оканчивается цифрой 6, а $2^{64} - 1$ оканчивается цифрой 5 и по известному признаку делимости кратно 5.

250. Решение. 4) Представим числа в виде степени с основанием 5: $25^3 = (5^2)^3 = 5^6$, $125^2 = (5^3)^2 = 5^6$. Данные числа равны, т. е. $25^3 = 125^2$.

260. Доказательство. а) $8^7 - 2^{18} = (2^3)^7 - 2^{18} = 2^{21} - 2^{18} = 2^{18}(2^3 - 1) = 2^{18} \cdot 7$. Видно, что число делится на 7 и на 2, значит, оно делится на 14. Что и требовалось доказать.

264. Решение.

$$1) (5 \cdot 32 \cdot 25)^3 = 1440^3; 2) (27 \cdot 33 \cdot 5 \cdot 7)^2 = 120\,960^2.$$

266. Доказательство. а) $100\,002^4 > 100\,000^4 = 10^{20} = 10000^5 > 9997^5$; б) $31^{11} < 32^{11} = 2^{55} < 2^{56} = 16^{14} < 17^{14}$.

266. Решение. Значения выражений $(-2)^8 a^2 b^3 c^{n-1}$ и $(-3)^9 a^2 b^5 c^{n+1}$ имеют разные знаки, так как $(-2)^8 > 0$, $(-3)^9 < 0$, b^3 и b^5 одного знака, c^{n-1} и c^{n+1} одного знака, $a^2 > 0$. После умножения на a первое выражение должно свой знак изменить, следовательно, $a < 0$.

284. Решение. 4) Выразим M^3 из равенства:

$$M^3 = \frac{56x^{15}y^{15}8y^3}{7x^3} = 64x^{12}y^{18}; M = 4x^4y^6.$$

285. Решение.

$$10) \frac{16^9 \cdot 5^{19}}{20^{20}} = \frac{(2^4)^9 \cdot 5^{19}}{(2^2 \cdot 5)^{20}} = \frac{2^{36} \cdot 5^{19}}{2^{40} \cdot 5^{20}} = \frac{1}{2^4 \cdot 5} = \frac{1}{80}.$$

287. Решение. 4) $\frac{x^{52} \cdot x^{29}}{(x^3)^{14} x^9 (x^4)^7} = 81$, $\frac{x^{81}}{x^{42+9+28}} = 81$, $\frac{x^{81}}{x^{79}} = 81$, $x^2 = 81$, $x = 9$, $x = -9$.

Глава 4

Многочлены

307. Решение. 2) $3a^3 - 5a^2 + 7a - 8 = C - a^3 - a^2 + 6$ или $3a^3 - 5a^2 + 7a - 8 = a^3 + a^2 - 6 - B$.

$$C = 3a^3 - 5a^2 + 7a - 8 + a^3 + a^2 - 6, C = 4a^3 - 4a^2 + 7a - 14.$$

$$3a^3 - 5a^2 + 7a - 8 = a^3 + a^2 - 6 - B, B = a^3 + a^2 - 6 - (3a^3 - 5a^2 + 7a - 8), B = a^3 + a^2 - 6 - 3a^3 + 5a^2 - 7a + 8, \\ B = -2a^3 + 6a^2 - 7a + 2.$$

311. Решение.

$$2) 2ab^2 + 3a^2b + 5ab^2 - 2a^2b - 7ab^2 = a^2b.$$

315. Решение. Прибавить к первому слагаемому — это значит прибавить к сумме. Произведем действия с суммой, указанные в задании: $3c + 1 + 2c - 4 - c + 2 = 4c - 1$. Видно, что нужно вычесть $4c - 1$.

316. Решение. Приведем левую часть равенства к многочлену стандартного вида относительно переменной x и будем приравнивать коэффициенты многочленов в обеих частях равенства. Сначала найдем $c = -1$. Затем $a + b = -1$ и, наконец, $p = 2$.

317. Решение. Составим указанную сумму:

$$(19,1)^5 - 1,7 \cdot (19,1)^3 + 2,5 + (-19,1)^5 - 1,7 \cdot (-19,1)^3 + 2,5 = 2,5 + 2,5 = 5.$$

Видно, что первый и четвертый члены уничтожатся, а также второй и пятый.

328. Решение. Обозначим задуманное число буквой x , тогда $x + 2$ — число, увеличенное на 2, $(x + 2) \cdot x$ — произведение задуманного числа на результат сложения, $(x + 2) \cdot x + 10 - x^2 - 2x = 10$. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые. $x^2 + 2x + 10 - x^2 - 2x = 10$.

339. Доказательство. 6) Чтобы доказать, что сумма $7^8 + 7^6$ кратна 350, нужно разложить сумму на множители и среди этих множителей увидеть делители числа 350.

Разложим число 350 на простые множители:

$$350 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Разложим на множители сумму: $7^8 + 7^6 = 7^6 \cdot (7^2 + 1) = 7^6 \cdot 50 = 7^6 \cdot 2 \cdot 5^2$. Видно, что сумма делится на 350.

352. Доказательство.

$$2) (n + 8)(n + 9) - n(n - 7) = n^2 + 17n + 72 - n^2 + 7n = 24n + 72 = 24(n + 3) \text{ делится на } 24. \text{ Что и требовалось доказать.}$$

353. Решение. 5) Пусть длина меньшей стороны картины x дм (рис. 73).

$$\text{Тогда } 2(x + 2) \cdot 1 + 2(x + 3) \cdot 1 = 54, 4x = 44, x = 11 \text{ (дм).}$$

Найдем площадь картины без рамки:

$$(x + 3)x = (11 + 3) \cdot 11 = 154 \text{ (дм}^2\text{)}.$$

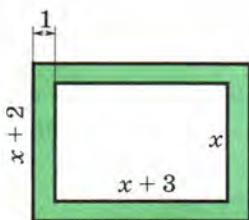


Рис. 73

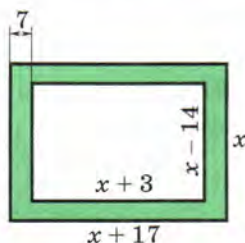


Рис. 74

Ответ: 154 дм^2 .

6) Пусть меньшая сторона участка равна x м (рис. 74).

Тогда $(x + 17)x - (x + 3)(x - 14) = 1414$, $28x = 1372$, $x = 49$ (м).

Найдем площадь участка:

$$(x + 17)x = (49 + 17) \cdot 49 = 3234 \text{ (м}^2\text{)}.$$

Ответ: 3234 м^2 .

362. Решение. 6) $y^4 - 2y^3 - y^2 + 2y = 0$,

$$y^3(y - 2) - y(y - 2) = 0, (y - 2)(y^3 - y) = 0, y(y - 2)(y^2 - 1) = 0, \\ y(y - 2)(y - 1)(y + 1) = 0, y = 0, y = 2, y = 1, y = -1.$$

363. Решение. 4) Чтобы заполнить пропуски в выражении $36y^5 - 54y^4 + 10y - \dots = (\dots - \dots)(\dots + \dots)$, нужно предварительно вынести общий множитель у первых двух членов $36y^5 - 54y^4 = 18y^4(2y - 3)$. У следующих двух членов тоже должен быть общий множитель $2y - 3$. Вынесем этот общий множитель: $5(2y - 3)$. Раскрыв скобки, найдем четвертый член в левой части: $10y - 15$. Теперь восстановим всю запись.

$$36y^5 - 54y^4 + 10y - 15 = (2y - 3)(18y^4 + 5).$$

365. Решение. 1) $x^{n+1} - x^n + x - 1 = x^n(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(x^n + 1)$;

$$2) x^n - 2x^{n-1} - 2x + 4 = x^{n-1}(x - 2) - 2(x - 2) = (x - 2)(x^{n-1} - 2).$$

370. Решение. 2) Запишем формулу разности квадратов двух натуральных чисел: $a^2 - c^2 = (a - c)(a + c)$. Чтобы число оказалось простым, нужно, чтобы $a - c = 1$.

Ответ: может, например, разность квадратов двух натуральных чисел 6 и 5.

4) Запишем формулу квадрата суммы: $(a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac$. Видно, что равенства $(a + c)^2 = a^2 + c^2$ быть не может,

так как в правой части не хватает удвоенного произведения данных чисел.

372. Решение. 1) Запишем условие задания: $a - c = 4$, $a^2 - c^2 = 104$. Выразим из формулы $a^2 - c^2 = (a - c)(a + c)$ сумму чисел: $a + c = \frac{a^2 - c^2}{a - c} = \frac{104}{4} = 26$.

380. Решение. 7) $x^2 - 10x - 24 = 0$, $x^2 - 10x + 25 - 25 - 24 = 0$, $(x - 5)^2 - 49 = 0$, $(x - 5)^2 = 49$, $x - 5 = 7$ или $x - 5 = -7$, $x = 12$ или $x = -2$.

381. Решение. 7) $(p - 3)^2(p + 3)^2 = ((p - 3)(p + 3))^2 = (p^2 - 3)^2 = p^4 - 6p^2 + 9$. 8) $(10 - c^2)(10 + c^2)(100 + c^4)(100 - c^4)(100 + c^4) = 10\,000 - c^8$.

384. Решение. 6) $(a - 1)^2 - (a + 1)^2 = (a - 1 - (a + 1))(a - 1 + a + 1) = (a - 1 - a - 1) \cdot 2a = -4a$.

393. Решение. Обозначим сторону квадрата через x (см), тогда стороны прямоугольника равны $x + 10$ (см) и $x - 10$ (см). Площадь квадрата равна x^2 (см²), площадь прямоугольника равна $(x - 10)(x + 10)$ (см²). Для сравнения найдем разность площадей $x^2 - (x - 10)(x + 10) = x^2 - x^2 + 100 = 100$ (см²). Следовательно, площадь квадрата на 100 см² больше площади прямоугольника.

394. Решение. 1) $x^2(x - 1)(x + 1) = 0$, $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$; 5) $(x - 1)(x^2 - 25) = 0$, $(x - 1)(x - 5)(x + 5) = 0$, $x = 1$, $x = 5$, $x = -5$.

395. Решение. $2xy(x^2 + y^2) =$
 $= 2\left(1 + \frac{1}{2}ab\right)\left(1 - \frac{1}{2}ab\right)\left(\left(1 + \frac{1}{2}ab\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}ab\right)^2\right) =$
 $= 2\left(1 - \frac{1}{4}a^2b^2\right)\left(1 + ab + \frac{1}{4}a^2b^2 + 1 - ab + \frac{1}{4}a^2b^2\right) =$
 $= 2\left(1 - \frac{1}{4}a^2b^2\right)\left(2 + \frac{1}{2}a^2b^2\right) = \left(2 - \frac{1}{2}a^2b^2\right)\left(2 + \frac{1}{2}a^2b^2\right) =$
 $= 4 - \frac{1}{4}a^4b^4$.

399. Решение. Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

1) $(3x - 5)^2 + (4x + 12)^2 + Mx = 9x^2 - 30x + 25 + 16x^2 + 96x + 144 + Mx = 25x^2 + (66 + M)x + 169$. Поскольку $(5x \pm 13)^2 = 25x^2 \pm 130x + 169$, имеем: $66 + M = \pm 130$, $M = 64$ или $M = -196$.

2) $(17x + 10)^2 - (15x - 8)^2 + Mx = 289x^2 + 340x + 100 - 225x^2 + 240x - 64 = 64x^2 + (580 + M)x + 36 = (8x \pm 6)^2$, тогда $580 + M = \pm 96$, $M = -484$ или $M = -676$.

401. Решение. 2) $(x - y)^2 + (1 - x + y)^2 = 0$, $x - y = 0$ и $1 - x + y = 0$, $x = y$ и $1 - x + x = 0$, $1 = 0$, нет решений.

402. Решение. Раскроем скобки и перенесем все члены в одну часть равенства: $x^2 = 2(xy - y^2 - y)$, $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y = 0$, $(x^2 - 2xy + y^2) + y^2 + 2y + 1 - 1 = 0$, $(x - y)^2 + (y + 1)^2 = 1$. Сумма двух целых неотрицательных чисел равна 1,

когда одно из них 0, а другое 1, значит, $\begin{cases} x - y = 0, \\ (y + 1)^2 = 1 \end{cases}$ или

$\begin{cases} (x - y)^2 = 1, \\ y + 1 = 0, \end{cases} \begin{cases} y = x, \\ y = \pm 1 - 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} x - y = \pm 1, \\ y = -1. \end{cases}$ Получаем четыре пары решений: $(0; 0)$, $(-2; -2)$, $(0; -1)$, $(-2; -1)$.

404. Решение. 1) Обозначим данное число буквой x , тогда среднее число тоже равно x , а соседние с ним целые числа — $x - 1$ и $x + 1$. Составим уравнение $x^3 - (x - 1)x(x + 1) = 17$. Решим это уравнение: $x^3 - x(x^2 - 1) = 17$, $x^3 - x^3 + x = 17$, $x = 17$. Искомые числа: 16, 17 и 18. 2) Обозначим первое число через $x - 1$, тогда следующие числа будут x и $x + 1$. Составим уравнение: $x(x - 1)(x + 1) + 2(x - 1 + x + x + 1) - x^3 = 35$. $x(x^2 - 1) + 2 \cdot 3x - x^3 = 35$, $x^3 - x + 6x - x^3 = 35$, $5x = 35$, $x = 7$. Это числа: 6, 7 и 8.

407. Решение. 1) а) $a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2$. Квадрат $(a + 2)^2$ принимает наименьшее значение в нуле, т. е. $a + 2 = 0$, $a = -2$. Наименьшее значение нуль. б) $(2b - 1)(2b + 1) - 3(5 - 4b) = 4b^2 - 1 - 15 + 12b = 4b^2 + 12b - 16 = (2b + 3)^2 - 25$. Наименьшее значение квадрата равно нулю, т. е. $2b + 3 = 0$ при $b = -\frac{3}{2}$, а наименьшее значение всего выражения равно -25 .

413. Решение. 2) Сгруппируем члены, приведем к формуле разности квадратов: $(a^2 + 2ax + x^2) - (b^2 + 2by + y^2) = (a + x)^2 - (b + y)^2 = (a + x - b - y)(a + x + b + y)$.

4) Сгруппируем члены: $(a^2b^2 + 2abcd + c^2d^2) - (a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2)$. Применим формулы сокращенного умножения:

$(ab + cd)^2 - (ac - bd)^2 = (ab + cd - ac + bd)(ab + cd + ac - bd)$.

418. Доказательство.

1) $m^4 + 4n^4 + 4m^2n^2 - 4m^2n^2 = (m^2 + 2n^2)^2 - 4m^2n^2 = (m^2 + 2n^2 - 2mn)(m^2 + 2n^2 + 2mn) = ((m - n)^2 + n^2)(m^2 + 2n^2 + 2mn)$. Оба множителя при заданных m и n больше 1, значит, их произведение — число составное.

420. Доказательство. 2) Разложим левую часть равенства по формуле разности квадратов: $(8(5a + 1) - 25a^2 - 8)(8(5a + 1) + 25a^2 + 8) = (40a + 8 - 25a^2 - 8)(40a + 8 + 25a^2 + 8) = 5a(8 - 5a)(25a^2 + 16 + 40a) = 5a(8 - 5a)(5a + 4)^2$. Что и требовалось доказать.

422. Доказательство. Раскроем скобки в равенстве: $a^2d^2 + ba^2c^2 + bc^2d^2 + b^2c^2k^2 = a^2d^2 + b^2c^2k^2 + 2abcdk + ba^2k^2 + bc^2d^2 - 2abcdk$. Приведем подобные члены, чем и завершим доказательство.

Глава 5

Вероятность

425. Решение. 2) а) Есть только одна возможность вытащить любую конкретную карту, поэтому возможности вытащить десятку бубен и пиковую даму равновероятны.

б) Поскольку в карточной колоде имеется четыре валета и четыре короля, есть четыре возможности вытащить валета и четыре возможности вытащить короля. Значит, возможности вытащить валета и короля равновероятны.

в) В колоде четыре туза и девять карт бубновой масти. Таким образом, имеется четыре возможности вытащить туза и девять возможностей вытащить карту бубновой масти. Значит, возможность вытащить бубну более вероятна, чем возможность вытащить туза.

426. Решение. 2) а) Есть три возможности вытащить черный и столько же возможностей вытащить красный шар, значит, возможности вытащить черный и красный шары равновероятны.

б) Возможностей вытащить черный шар меньше, чем возможностей вытащить красный, значит, вытаскивание красного шара более вероятно, чем черного.

428. Решение. В сумме может выпасть от 2 до 12 очков. Возможности не являются равновероятными. Так, например, есть только одна возможность того, что сумма очков будет равна 2: когда 1 выпадает и первый, и второй раз. Получить же сумму очков, равную 3, можно в двух случаях, когда

первый раз выпадает 1, а второй — 2 и когда первый раз выпадет 2, а второй — 1. Значит, возможность получить в сумме 3 очка более вероятна, чем возможность получить 2 очка.

432. Решение. Достоверным событием является то, что будет вытащена карта.

Такой картой может с равной вероятностью оказаться любая из 36 карт колоды. Это достоверное событие складывается из 36 возможностей, вероятность каждой из которых равна $\frac{1}{36}$.

433. Решение. Квадрат для игры в «Морской бой» состоит из 100 клеток, в каждой из которых с равной вероятностью может оказаться корабль, значит, есть 100 равновероятных возможностей при угадывании нужной клетки. Только одна из них приведет к успеху. Вероятность угадать нужную клетку первым же ходом равна $\frac{1}{100}$.

434. Решение. Покупка любого из билетов равновероятна, значит, всего есть 100 равновероятных возможностей купить билет. В 20 из них будет выигрыш, значит, вероятность выиграть равна $\frac{20}{100}$, или 0,2.

435. Решение. Считаем, что покупка любого из 1 млн билетов равновероятна, значит, есть 1 млн равновероятных возможностей купить билет лотереи. Из них имеется 300 тыс. возможностей купить билет, на который выпадет выигрыш. Вероятность купить такой билет равна

$$\frac{300\,000}{1\,000\,000} = 0,3.$$

436. Решение. Саша ошибся в самом начале своих рассуждений. Он должен был найти общее число всех равновероятных возможностей, которые имеются при бросании двух монет. Таких возможностей четыре: ОО, ОР, РО, РР. Решка выпадает в трех из них, значит, вероятность выпадения решки равна $\frac{3}{4}$.

437. Решение. При игре в «Морской бой» в квадрате 10×10 клеток ставятся 4 одноклеточных, 3 двухклеточных, 2 трехклеточных и 1 четырехклеточный корабль. Всего кораблями занято $4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 20$ клеток. Среди

100 равновероятных возможностей назвать клетку есть 20, в которых будет попадание. Значит, искомая вероятность равна $\frac{20}{100} = 0,2$.

439. Решение. 2) Есть 10 равновероятных возможностей вынуть шар из коробки. Среди них четыре возможности вынуть белый шар и шесть — цветной. Значит,

$$P_{\text{шар белый}} = \frac{4}{10} \text{ и } P_{\text{шар цветной}} = \frac{6}{10}.$$

440. Решение. Есть всего четыре равновероятных возможности вытащить карточку и положить ее на стол. В трех из них верхняя сторона карточки окажется белой. Только в одном из этих трех равновероятных случаев нижняя сторона карточки черная.

Значит, искомая вероятность равна $\frac{1}{3}$.

441. Решение. 1) На каждой из трех монет с равной вероятностью может выпасть орел или решка. При бросании трех монет есть две равновероятные возможности: выпадет больше орлов, выпадет больше решек. 2) Имеем всего восемь равновероятных возможностей: PPP, PPO, POP, OPP, POO, OPO, OOP, OOO. а) Одна из них PPP (три решки). $P_{PPP} = \frac{1}{8}$; б) другая возможность OOO — ни одной решки, т. е. три орла: $P_{OOO} = \frac{1}{8}$; в) если не выпали три орла, то наверняка выпала хотя бы одна решка: $\frac{8-1}{8} = \frac{7}{8}$.

442. Решение. Найдём число возможностей расставить на полке три книги. Обозначим книгу А. Дюма буквой Т, книгу В. Скотта буквой А, а третью книгу — буквой К. Имеем: АКТ, АТК, КАТ, КТА, ТАК, ТКА, всего шесть равновероятных возможностей. Возможности равновероятны, так как на названия книг внимания не обращают. 1) В единственной из этих возможностей ТКА «Три мушкетера» стоит первой слева, а «Айвенго» — первой справа. Вероятность этого равна $\frac{1}{6}$; 2) есть две таких возможности: ТАК, ТКА. Вероятность равна $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; 3) КТА, ТАК — две возможности. Вероятность

равна $\frac{1}{3}$; 4) АТК, КАТ, КТА, ТАК — четыре возможности.

Вероятность равна $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

443. Решение. При бросании двух игральных костей каждая из них может выпасть шестью способами, значит, по правилу произведения имеется всего $6 \cdot 6 = 36$ равновероятных возможностей выпадения двух игральных костей.

1) Выпишем возможности, при которых сумма очков на костях равна 3: 1—2, 2—1. Оказалось, что есть всего две таких возможности, значит, вероятность выпадения такой суммы равна $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$.

2) 10 очков в сумме выпадет в следующих трех случаях: 5—5, 4—6 и 6—4, значит, $P_{10} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

3) Выпишем возможности, при которых сумма очков на костях меньше 4: 1—1, 1—2, 2—1. Оказалось, что есть всего три таких возможности, значит, вероятность выпадения такой суммы равна $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

5) Сумма выпавших очков будет четной, когда четность очков на каждой из костей будет одинакова, т. е. на обеих костях будет либо по четному, либо по нечетному числу очков. Каждой из трех возможностей выпадения на первой кости четного числа очков соответствуют три возможности выпадения четного числа очков на второй кости, значит, есть $3 \cdot 3 = 9$ возможностей выпадения на обеих костях по четному числу очков. Аналогично, есть 9 возможностей выпадения на обеих костях по нечетному числу очков. Таким образом, есть $9 + 9 = 18$ возможностей выпадения четной суммы очков. Вероятность этого равна $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

6) В остальных $36 - 18 = 18$ возможностях выпадения костей сумма очков будет нечетной. Понятно, что вероятность этого также равна $\frac{1}{2}$.

444. Решение. Заполним таблицу.

Сумма очков	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Число возможностей	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

7 очков в сумме может выпасть в наибольшем числе случаев, значит, такая сумма наиболее вероятна. $P_7 = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

445. Решение. Каждой из четырех возможностей выбора вида салата соответствует три возможности выбора вида супа, четыре возможности выбора второго блюда и пять возможностей выбора напитка. По правилу произведения найдем число различных вариантов заказа обеда: $4 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 240$.

446. Решение. Каждой из трех возможностей выбора дороги из A в B соответствует четыре возможности выбора дороги из B в C . По правилу произведения получаем:

$$3 \cdot 4 = 12 \text{ (маршрутов).}$$

447. Решение. 1) Каждый член многочлена является произведением одного из членов первой скобки на один из членов второй скобки.

а) Член первой скобки можно выбрать тремя, а второй — двумя способами. По правилу произведения число членов многочлена равно $3 \cdot 2 = 6$.

б) Член первой скобки можно выбрать четырьмя, а второй — тремя способами. По правилу произведения число членов многочлена равно $4 \cdot 3 = 12$.

2) Старший член многочлена получается при перемножении старших членов множителей. а) $4x^3 \cdot x = 4x^4$; б) $12x^5 \cdot 3x^2 = 36x^7$.

а) Член, содержащий x , можно получить двумя способами, умножая $-3x^2$ на x и умножая $4x^3$ на -1 . После приведения подобных членов получим $-7x^3$.

б) Член, содержащий x^3 , можно получить, умножая $-5x^3$ на 4 , $7x^2$ на $2x$ и $-2x$ на $3x^2$. После приведения подобных получим $-12x^3$.

448. Решение. 1) а) $8 = 2^3$. Делителями этого числа являются степени числа 2 с показателями 1, 2 и 3, а также число 1. Таким образом, число 8 имеет четыре натуральных делителя.

б) $216 = 6^3 = 2^3 \cdot 3^3$. Произведение любого из натуральных делителей числа 2^3 на любой из делителей числа 3^3 является делителем числа 216, а других делителей число 216 не имеет. Делитель числа 2^3 можно выбрать четырьмя способами, делитель числа 3^3 также можно выбрать четырьмя способами.

По правилу произведения число натуральных делителей числа 216 равно $4 \cdot 4 = 16$.

в) $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$. Число 5 имеет два натуральных делителя: 1 и 5. Рассуждая так же, как и в случае б), получаем: $4 \cdot 4 \cdot 2 = 32$.

г) Число $p_m^{k_m}$ имеет $k_m + 1$ натуральных делитель.

Значит, число q имеет $(k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdot \dots \cdot (k_m + 1)$ натуральных делителей.

2) а) Любое натуральное число делится само на себя и на 1. У числа 1 эти делители равны, а если число других делителей не имеет, то оно простое. б) Пусть некоторое число кратно простому числу p . Но тогда у него уже есть два делителя: 1 и p . Третий делитель не должен делиться ни на какое натуральное число, кроме себя, 1 и p , значит, он равен $1 \cdot p \cdot p = p^2$. Следовательно, числа, имеющие три натуральных делителя, представляют собой квадраты простых чисел.

449. Решение. 1) а) $n!$, где n — число учащихся в вашем классе; б) $6! = 720$. 2) В обеих задачах речь идет о числе способов, которыми можно переставить элементы, т. е. о числе перестановок.

450. Решение. 1) Запишем одно из таких чисел, например 1236. Все числа, о которых идет речь в задаче, получаются из него перестановками цифр этого числа. Значит, нужно найти P_4 . $P_4 = 4! = 24$.

2) а) Четность и нечетность числа зависит от того, какой цифрой число заканчивается. Есть четыре равновероятные возможности выбора последней цифры. Две из этих цифр нечетные, их выбор даст нам нечетное число. Значит, вероятность выбрать нечетное число равна $\frac{2}{4} = 0,5$.

б) Сумма цифр любого из полученных чисел равна $1 + 2 + 3 + 6 = 12$. По признаку делимости на 3 все эти числа делятся на 3. Значит, выбор числа, кратного 3, является достоверным событием и его вероятность равна 1.

в) Чтобы число было кратным 4, его последние две цифры должны составлять кратное 4 число, т. е. число должно заканчиваться на 12, 16, 32 или 36. В каждом из этих четырех случаев первые две цифры являются перестановками оставшихся двух цифр. Число чисел, кратных 4, находим по правилу произведения $4 \cdot P_2 = 8$. Вероятность выбрать одно из та-

ких чисел равна $\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

г) Ни одно из чисел не оканчивается ни нулем, ни пятеркой, а значит, не может быть кратным 5. Выбор числа, кратного 5, является невозможным событием, и его вероятность равна нулю.

451. Решение 1. Если бы можно было ставить 0 на первое место, то количество таких чисел оказалось бы равным P_5 . Поскольку 0 не должен стоять на первом месте, следует «отбросить» все перестановки данных цифр, начинающиеся с нуля. В каждой из них 0 стоит на первом месте, а остальные четыре цифры можно переставлять как угодно. Значит, число перестановок, начинающихся с нуля, равно P_4 . Таким образом, искомое количество чисел равно

$$P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96.$$

Решение 2. На первое место можно поставить любую из четырех отличных от нуля цифр. Остальные четыре места занимают оставшиеся после этого неиспользованными четыре цифры. Их можно произвольно переставить P_4 способами. По правилу произведения всего чисел получится

$$4 \cdot P_4 = 4 \cdot 24 = 96.$$

452. Решение. Четверых музыкантов можно как угодно пересаживать, значит, получится число перестановок из четырех: $P_4 = 24$.

453. Решение. Полосы данных цветов можно менять местами. Всего возможно $P_3 = 6$ разных флагов.

461. Решение. 1) б) $30 \cdot 29 \cdot 28 = 24\,360$ способов. 2) В этих задачах речь идет о комбинациях, в которых важен порядок следования элементов, значит, это размещения.

462. Решение. Из четырех цветов выбирается три. При этом важен порядок следования цветов, значит, комбинации цветов флагов являются размещениями. Их число равно $A_4^3 = 4! = 24$. Именно столько стран могут использовать такие флаги.

463. Решение. 1) Отдельно выбираются дежурные мальчики и дежурная девочка. Два мальчика выбираются из 14 кандидатов, причем не важно, в каком порядке, значит, это сочетание и выбрать их можно C_{14}^2 способами. Одну девочку из 12 кандидаток можно выбрать двенадцатью способами. По правилу произведения всех трех дежурных можно назначить $C_{14}^2 \cdot 12 = 1092$ способами. 2) При выборе 11 футболистов из 14 кандидатов не важно, в каком порядке называются их

фамилии. Значит, речь идет о сочетаниях и их число $C_{14}^{11} = 364$; 3) Вопрос о футбольной карьере Пети Иванова решен, и осталось набрать 10 футболистов из оставшихся 13 кандидатов: $C_{13}^{10} = 286$.

464. Решение. 1) В условии задачи сказано, что бочонки вынимают по одному, значит, порядок, в котором вынимаются первые два бочонка, важен, и мы имеем дело с размещениями. Всего бочонков 99, два из них можно выбрать A_{99}^2 способами. Сумма 100 очков получается в следующих случаях: 1—99, 99—1, 2—98, 98—2, ..., 48—52, 52—48, 49—51, 51—49. Таким образом, есть $49 + 49 = 98$ возможностей на первых двух бочонках получить сумму, равную 100. Искомая вероятность равна $\frac{98}{A_{99}^2} = \frac{1}{99} \approx 0,01$.

2) Есть всего 99 возможностей вынуть бочонок. Среди них есть 25, когда на бочонке окажется простое число. Значит, искомая вероятность равна $\frac{25}{99} \approx 0,25$.

3) Среди 99 возможностей вынуть бочонок есть 19, в которых на бочонке будет число, кратное 5. Значит, искомая вероятность равна $\frac{19}{99} \approx 0,2$.

465. Решение. 1) а) $C_7^3 = 35$ способов; б) $C_{25}^3 = 2300$. 2) В этих задачах порядок, в котором выбираются элементы в комбинацию, роли не играет, т. е. от перемены мест элементов в комбинации сама комбинация не изменяется.

466. Решение. 1) Каждая партия — результат выбора двух шахматистов из 10. Не важно, кого назовут первым, а кого вторым. Значит, этот выбор приводит к сочетанию из 10 по 2. Число таких сочетаний: $C_{10}^2 = 45$.

2) Если в турнире участвуют n шахматистов, то число партий равно $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$.

Поскольку партий было 10, получаем уравнение $\frac{n(n-1)}{2} = 10$ и подбором находим его натуральный корень, равный 5. Ответ: 5 человек.

468. Решение. Выбрать три вопроса из 25 для включения в экзаменационный билет можно C_{25}^3 способами. 1) Чтобы получить на экзамене пятерку, Сергей должен знать все три вопроса билета. Вопросы для таких билетов должны вы-

бираться из выученных Сергеем двадцати, и их число равно C_{20}^3 . Вероятность вытянуть такой билет на экзамене равна

$$\frac{C_{20}^3}{C_{25}^3} = \frac{57}{115} \approx 0,5.$$

2) Четверку Сергей получит, если в его билет войдут два вопроса из выученных им двадцати и один вопрос из пяти им не выученных. Выбрать два вопроса из двадцати можно C_{20}^2 способами, а один вопрос из пяти — пятью способами. По правилу произведения находим число четверочных для Сер-

гея билетов: $C_{20}^2 \cdot 5$. Вероятность этого равна $\frac{5C_{20}^2}{C_{25}^3} = \frac{19}{46} \approx 0,4$.

469. Решение. 1) Подбираем натуральный корень уравнения $\frac{x(x-1)}{2} = 21$. $x = 7$.

2) $\frac{x!}{(x-2)!2!} = 6$, $x(x-1) = 12$. В левой части уравнения имеем произведение двух последовательных натуральных чисел. Представив 12 как $4 \cdot 3$, найдем, что $x = 4$.

$$3) \frac{x!}{(x-4)!4!} = \frac{x!}{(x-3)!3!}, \frac{(x-3)!}{(x-4)!} = \frac{4!}{3!}, x-3=4, x=7.$$

$$4) \frac{x!}{(x-3)!3!} = \frac{19x!}{(x-2)!2!}, \frac{(x-2)!}{(x-3)!} = \frac{19 \cdot 3!}{2!}, x-2=57, x=59.$$

470. Решение. 1) Каждую секунду точка M имеет две возможности выбора направления, значит, за 5 секунд число ее равновероятных маршрутов равно $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 32$.

а) Только один из этих маршрутов приведет точку M в точку $A(0; 5)$. Искомая вероятность $P(A) = \frac{1}{32}$.

б) Чтобы попасть в точку $B(4; 1)$, точка M единственный раз из пяти (все равно какой) должна выбрать направление вверх. Выбрать один из пяти можно пятью способами, значит, есть 5 маршрутов, приводящих в точку B . Искомая вероятность $P(B) = \frac{5}{32}$.

2) Абсцисса конечной точки маршрута равна числу сдвигов вправо, а ордината полностью определяется абсциссой, поскольку число всех сдвигов равно 5. Так, например, если точка M три раза из пяти выбрала сдвиг вправо, то она окажется в точке с координатами $x = 3$, $y = 2$. Число маршрутов, которые ведут в эту точку, равно числу способов, которыми

можно выбрать 3 из 5 сдвигов, т. е. C_5^3 , поскольку порядок выбора на координаты конечной точки не влияет. Аналогично, в точку (2; 3) ведут C_5^2 маршрутов. Чем большее число маршрутов ведет в точку, тем больше вероятность для точки M в ней оказаться. Таким образом, нам нужно сравнить числа C_5^0 , C_5^1 , C_5^2 , C_5^3 , C_5^4 и C_5^5 , т. е. соответственно: 1, 5, 10, 10, 5 и 1. Наибольшее число маршрутов (по 10) ведут в точки (2; 3) и (3; 2). Вероятность оказаться в одной из этих точек равна $\frac{5}{16}$.

3) Равновероятных маршрутов за 7 секунд будет $2^7 = 128$. Находя количество маршрутов, приводящих в точку с абсциссой k , как C_7^k , получим: а) $P(K) = \frac{C_7^7}{128} = \frac{1}{128}$; б) $P(N) = \frac{C_7^1}{128} = \frac{7}{128}$; в) $P(L) = \frac{C_7^0}{128} = \frac{1}{128}$; г) $P(E) = \frac{C_7^2}{128} = \frac{21}{128}$; д) $P(F) = \frac{C_7^5}{128} = \frac{21}{128}$; е) $P(H) = \frac{C_7^3}{128} = \frac{35}{128}$.

471. Решение. Шары вынимают одновременно, значит, если вынутые шары поменять местами, случай будет тем же самым, и мы имеем дело с сочетаниями шаров. При вытаскивании двух шаров из семи имеется всего C_7^2 различных равновероятных возможностей.

1) Поскольку черных шаров всего три, есть C_3^2 возможности вытащить два из них. Вероятность этого равна $\frac{C_3^2}{C_7^2} = \frac{1}{7}$.

2) Вероятность вытащить два белых шара равна $\frac{C_4^2}{C_7^2} = \frac{2}{7}$.

3) Есть три возможности вытащить черный шар, и каждой из них соответствуют четыре возможности вытащить белый шар. По правилу произведения получаем $3 \cdot 4 = 12$ возможностей вытащить шары разного цвета. Вероятность этого равна $\frac{12}{C_7^2} = \frac{4}{7}$.

472. Решение. 1) Любой вариант рассадки учеников можно получить, пересадив их, значит, общее число вариантов равно $P_4 = 24$.

2) Парту, за которую могут сесть Коля и Саша, можно выбрать 2 способами. Сесть за эту парту мальчики могут

2 способами. За оставшуюся парту девочки могут сесть 2 способами. По правилу произведения имеем $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ вариантов, в каждом из которых мальчики окажутся за одной партой. Вероятность этого равна $\frac{8}{P_4} = \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$.

473. Решение. Будем считать, что телефонный номер может начинаться с любой цифры. 1) Поскольку, изменив порядок цифр, мы получим другой телефонный номер, номера являются размещениями 7 цифр из 10. Число этих размещений, т. е. телефонных номеров равно A_{10}^7 .

2) В этих номерах можно несколько раз выбирать одну и ту же цифру, значит, известную нам формулу числа размещений использовать нельзя. Будем решать задачу с помощью правила произведения. Первую цифру можно выбрать десятью способами, каждому из них соответствует десять вариантов выбора второй цифры, десять вариантов выбора третьей, ..., десять вариантов выбора последней седьмой цифры номера. Имеем $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \dots \cdot 10 = 10^7$.

О т в е т: 10^7 телефонных номеров.

474. Решение. В расписании уроков важно, в каком порядке они записаны, значит, расписание уроков — это размещение шести уроков из возможных одиннадцати. Поскольку уроки в пятницу не повторяются, число вариантов расписания равно A_{11}^6 .

475. Решение. 1) В двузначном числе на первое место можно поставить любую цифру из множества: 2, 4, 6, 8; на второе место можно поставить любую цифру из множества: 0, 2, 4, 6, 8. Таким образом, получаем, что на первое место можно поставить цифру 4 способами, а на второе — 5 способами, всего $5 \cdot 4 = 20$.

2) Последней цифрой трехзначного числа должен быть 0 или 5. Перед последней цифрой трехзначного числа записано двузначное число. Всего двузначных чисел 90. К каждому из них можно приписать третью цифру двумя способами (0 или 5). По правилу произведения получаем $90 \cdot 2 = 180$.

Можно было рассуждать иначе. Есть всего 900 трехзначных чисел. Каждое пятое из них кратно пяти: 995, 990, 985, ..., 105, 100. Значит, число таких чисел в пять раз меньше числа всех трехзначных чисел: $900 : 5 = 180$.

3) Приписав справа нуль к любому трехзначному числу, получим четырехзначное число, оканчивающееся нулем. Таких чисел столько же, сколько трехзначных чисел, т. е. 900.

4) Любое из таких пятизначных чисел можно получить, приписав к трехзначному числу справа сначала цифру разряда десятков, а затем цифру разряда сотен. Например, $374 \rightarrow 37473$. Значит, таких пятизначных чисел столько же, сколько трехзначных чисел, т. е. 900.

476. Решение. Для любых двух языков нужны два словаря, например для перевода с русского на английский нужен русско-английский словарь, а для перевода с английского на русский понадобится англо-русский словарь. На первом месте в названии словаря указывается, с какого языка, а на втором — на какой язык выполняется перевод. Перемена этих названий местами приведет к другому словарю, значит, название словаря является размещением. Число названий, равное числу требуемых словарей, равно $A_4^2 = 12$.

477. Решение. В каком порядке на карточке указаны номера, роли не играет, главное, чтобы это сочетание номеров выпало при розыгрыше. Число сочетаний шести номеров из 49 равно $C_{49}^6 = 303\,996$.

478. Решение. Выпишем все такие буквы: А, В, Е, К, М, Н, О, Р, С, Т, Х, У. Пусть в номере сначала указываются буквы, а затем цифры. Тогда на первом месте может оказаться любая из 11 букв, на втором и третьем местах — также любые из 11 букв. Затем четыре раза выбирается по одной из 10 цифр. По правилу произведения имеем

$$11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 11^3 \cdot 10^4 = 13\,310\,000.$$

479. Решение. Есть 100 вариантов выбора красной клетки. После ее закрашивания для выбора двух зеленых останется 99 клеток. Какую из них будут закрашивать первой, роли не играет, значит, выбор этих двух клеток является сочетанием, число которых C_{99}^2 . Осталось выбрать три синих клетки из 97 оставшихся после закрашивания зеленых. Выбрать их можно C_{97}^3 способами. По правилу произведения имеем $100C_{99}^2 \cdot C_{97}^3$.

480. Решение. По правилам корабля нельзя ставить вплотную друг к другу, поэтому, поставив один одноклеточный корабль, мы исключаем для второго корабля не только ту клетку, в которую его поставили, но и соседние с ней. Если одноклеточный корабль ставится в один из четырех углов, для второго корабля остается 96 клеток, в любую из которых его можно поставить. По правилу произведения имеем $4 \cdot 96$ вариантов. Пусть первый корабль ставится не в угол, но

к границе квадрата, т. е. в одну из $8 \cdot 4 = 32$ клеток. В каждом из таких случаев для второго корабля остается на выбор любая из 94 клеток. По правилу произведения получаем $32 \cdot 94$ вариантов. Рассмотрим, наконец, ситуацию, когда первый корабль не ставится к границе квадрата, т. е. занимает любую из соответствующих 64 клеток. В каждом из таких случаев для второго корабля остается 91 клетка, а число соответствующих вариантов равно $64 \cdot 91$. Всего у нас получилось $4 \cdot 96 + 32 \cdot 94 + 64 \cdot 91 = 9216$ вариантов поставить сначала один корабль, а затем второй. Однако одноклеточные корабли совершенно одинаковы, и каждую из полученных расстановок можно было получить, изобразив сначала второй корабль. Так, например, расстановку кораблей в клетки 1—3 и 5—4 мы рассмотрели и среди расстановок, когда первый корабль ставился и не ставился к границе. Таким образом, каждую из расстановок двух кораблей мы считали дважды, а значит, число расстановок в квадрате для игры в «Морской бой» двух одноклеточных кораблей равно

$$9216 : 2 = 4608.$$

Глава 6

Повторение

497. Решение. Одно трехзначное число запишем так: $100a + 10b + c$, в другом трехзначном числе цифры записаны в обратном порядке: $100c + 10b + a$. Составив разность данных чисел, получим:

$$100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 99a - 99c = 99(a - c).$$

Следовательно, разность трехзначных чисел делится на 99.

499. Решение. Это число составляется следующим образом: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 2520$.

501. Решение. 2) Если $10! = 35 \cdot (2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10) = 35 \cdot 103\,680$, $64 = 35 \cdot 1 + 29$, то $10! + 64 = 35 \cdot 103\,680 + 35 \cdot 1 + 29 = 35 \cdot (103\,680 + 1) + 29 = 35 \cdot 103\,681 + 29$. Таким образом, в частном получится 103 681, в остатке 29.

520. Совет. 3) Возьмите сумму числа клеток, полностью вошедших в фигуру, площадь которой вы находите, и половину от числа клеток, которые частично входят в эту фигуру.

529. Решение. 1) Так как прямая $y = kx + l$ проходит через точку $C(2; 1)$, то ее координаты можно подставить в уравнение прямой: $1 = 2k + l$. Так как прямая $y = kx + l$ парал-

лельна прямой $y = 3x - 1$, то $k = 3$. Подставим значение k в первое уравнение и найдем значение l . $1 = 2 \cdot 3 + l$, $l = -5$.

Ответ: $k = 3$, $l = -5$.

2) Так как прямая $y = kx + l$ перпендикулярна прямой $y = 3x - 1$, то $k = -\frac{1}{3}$. Подставим значение k в уравнение, ко-

торое было записано в задании 1): $1 = 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + l$, $l = 1\frac{2}{3}$.

Ответ: $k = -\frac{1}{3}$, $l = 1\frac{2}{3}$.

531. Совет. Упростите выражение, задающее функцию. Точку прямой, абсцисса которой не входит в область определения, отметьте крестиком или кружком.

540. Решение. 4) $1024a^3 + 64a = 64a(16a + 1)$;

$$8) 8xy^3 - 24y^2 - 7axy + 21a = 8y^2(xy - 3) - 7a(xy - 3) = (xy - 3)(8y^2 - 7a);$$

$$10) 25x^2 - (3x + 8y)^2 = (5x - 3x - 8y)(5x + 3x + 8y) = (2x - 8y)(8x + 8y) = 16(x - 4y)(x + y);$$

$$11) (a - 1)^3 - (a - 1)(3a + 1) = (a - 1)((a - 1)^2 - 3a - 1) = (a - 1)(a^2 - 2a + 1 - 3a - 1) = (a - 1)(a^2 - 5a) = a(a - 1)(a - 5).$$

545. Решение.

$$6) \frac{x^2 - y^2 - 2yz - z^2}{x^2 + xz - y^2 - yz} = \frac{x^2 - (y + z)^2}{x^2 - y^2 + z(x - y)} = \frac{(x - y - z)(x + y + z)}{(x - y)(x + y + z)} = \frac{x - y - z}{x - y}.$$

546. Совет. 2) Одно нечетное число запишите в виде $2n - 1$, второе нечетное число можно записать так: $2m - 1$, где n, m — натуральные числа.

4) Всякое простое число, большее 3, можно представить в виде $6k \pm 1$, где k — натуральное число.

Доказательство. 1) Если натуральное число a не делится на 3, то его можно записать одним из двух способов: $a = 3n - 1$, $a = 3n - 2$, где n — натуральное число. Составим разность квадрата данного числа и числа 1:

$$a^2 - 1 = (3n - 1)^2 - 1 = 9n^2 - 6n + 1 - 1 = 9n^2 - 6n = 3(3n^2 - 2n).$$

$$a^2 - 1 = (3n - 2)^2 - 1 = 9n^2 - 12n + 4 - 1 = 9n^2 - 12n + 3 = 3(3n^2 - 4n + 1).$$

В обоих случаях получаем число, кратное 3. Что и требовалось доказать.

4) $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. Всякое простое число, большее 3, можно представить в виде $6k \pm 1$, где k — натуральное число. Если $n = 6k + 1$, то получим $6k(6k + 2) = 12k(3k + 1)$. Если k четное, то на 24 делится $12k$, а если k нечетное, то четной будет сумма $3k + 1$ и $12(3k + 1)$ будет кратным 24. Аналогично рассматривается случай $n = 6k - 1$.

548. Доказательство. Любое из таких чисел можно представить в виде $9k \pm 1$, где k — целое число. Возведя в квадрат, получим: $81k^2 \pm 2 \cdot 18k + 1 = 9(9k^2 \pm 4k) + 1$ — число, дающее в остатке 1 при делении на 9.

553. Решение. Разложим число на множители $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Чтобы данное число было простым, нужно, чтобы меньший из множителей был равен единице, т. е. $p - 1 = 1$, $p = 2$. При этом значении p получаем: $p^2 - 1 = 3$ — простое число.

556. Решение. 1) $z^3 - 5z^2 + 3z - 15 = 0$, $(z^3 - 5z^2) + (3z - 15) = 0$; $z^2(z - 5) + 3(z - 5) = 0$, $(z - 5)(z^2 + 3) = 0$, $z = 5$.

561. Решение. 2) $\begin{cases} x + y = 3a - 5b, \\ y - x = a + 7b. \end{cases}$ Сложим и вычтем уравнения и получим новую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2y = 4a + 2b, \\ 2x = 2a - 12b, \end{cases} \quad \begin{cases} y = 2a + b, \\ x = a - 6b. \end{cases}$$

Ответ: $x = a - 6b$, $y = 2a + b$.

562. Решение. 4) $\begin{cases} x^2 + xy = 1080, \\ x + y = 40, \end{cases} \quad \begin{cases} x(x + y) = 1080, \\ x + y = 40, \end{cases}$
 $\begin{cases} x \cdot 40 = 1080, \\ x + y = 40. \end{cases}$

Из первого уравнения системы находим, что $x = 27$, из второго уравнения находим, что $y = 13$.

563. Решение. 2) $\begin{cases} x + 2y + 3z = 9, \\ x - 3y + 2z = 1, \\ 2x - 5y + 3z = 0. \end{cases}$ Сначала из первого

уравнения системы вычтем второе, затем сложим два первых уравнения и из результата вычтем третье.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9, \\ 5y + z = 8, \\ 4y + 2z = 10. \end{cases}$$

Третье уравнение системы разделим на 2.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9, \\ 5y + z = 8, \\ 2y + z = 5. \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем третье.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 9, \\ 5y + z = 8, \\ 3y = 3. \end{cases}$$

Из третьего уравнения находим, что $y = 1$, из второго уравнения находим, что $z = 3$, из первого уравнения $x = -2$.

Ответ: $x = -2$, $y = 1$, $z = 3$.

565. Решение. 1) Пусть x кг крупы купили по 14 р. за килограмм, y кг — по 9 р. за килограмм, тогда

$\begin{cases} x + y = 19, \\ 14x + 9y = 196. \end{cases}$ Решив систему, найдем ответ на вопрос задачи: 5 кг крупы по 14 р. за килограмм, 14 кг крупы по 9 р. за килограмм.

582. Решение. 1) К моменту выхода товарного поезда скорый поезд прошел $96 \cdot \frac{3}{5}$ (км). Между поездами оставалось $480 - 96 \cdot \frac{3}{5}$ (км). Скорость сближения поездов $80 + 96$ (км/ч). Товарный поезд шел до встречи со скорым поездом $\left(480 - 96 \cdot \frac{3}{5}\right) : (80 + 96) = \frac{14}{5}$ (ч). За время $\frac{14}{5}$ ч товарный поезд прошел $80 \cdot \frac{14}{5} = 224$ (км). Время встречи поездов $8 + \frac{3}{5} + \frac{14}{5} = 11\frac{2}{5}$ (ч). Ответ: 11 ч 24 мин, 224 км от пункта В.

583. 1) Решение. 1. Пусть время, за которое турист рассчитывал доехать до В, равно x ч. Тогда за первые 25 мин он проехал 25 км, а остальной путь у него занял $x + \frac{13}{60} - \frac{25}{60}$ ч.

Уравнение: $60x = 25 + 50 \cdot \left(x + \frac{13}{60} - \frac{25}{60}\right)$, $10x = 25 - 10$, $x = 1,5$ (ч). Путь от А до В равен $60x = 60 \cdot 1,5 = 90$ (км).

Ответ: 90 км.

Решение 2. Пусть $AB = x$ (км). Тогда за 25 мин, или $\frac{25}{60}$ ч, турист проехал 25 км. При скорости 50 км/ч на остав-

шую часть пути турист затратил на $\frac{13}{60}$ ч больше, чем если бы он продолжал движение со скоростью 60 км/ч. Значит, $\frac{x-25}{50} - \frac{x-25}{60} = \frac{13}{60}$. Имеем $6(x-25) - 5(x-25) = 5 \cdot 13$, $x-25 = 65$, $x = 90$ (км).

2) За полтора часа, двигаясь со скоростью 96 км/ч, поезд прошел 144 км. Обозначим оставшийся ему до C путь буквой x , тогда $\frac{x}{96} - \frac{x}{108} = \frac{1}{2}$. Чтобы освободиться от знаменателей, умножим равенство на их наименьшее общее кратное $12 \cdot 8 \cdot 9$. $9x - 8x = 6 \cdot 8 \cdot 9$, $x = 432$ (км). Теперь можно найти весь путь BC . $144 + 432 = 576$ (км).

Ответ: 576 км.

584. Решение. 1) Пусть x км/ч — скорость первого пешехода, y км/ч — скорость второго пешехода, тогда $(x+y)$ км/ч — скорость их сближения. За 3 ч 12 мин, что составляет 3,2 ч, пешеходы прошли расстояние $(x+y) \cdot 3,2 = 33 - 1$. За $(3,2 + 2,3)$ ч первый пешеход прошел расстояние $5,5x$, второй пешеход — $5,5y$, первому осталось пройти $(33 - 5,5x)$, второму — $(33 - 5,5y)$. Известно, что второму пешеходу осталось пройти в 3 раза больше, чем первому. Составляем второе уравнение. $33 - 5,5y = 3(33 - 5,5x)$. Получили систему

уравнений с двумя неизвестными:
$$\begin{cases} (x+y) \cdot 3,2 = 32, \\ 33 - 5,5y = 3(33 - 5,5x). \end{cases}$$

Решив систему, находим ответ: 4,5 км/ч и 5,5 км/ч.

2) Пусть x км/ч — скорость пешехода, y км/ч — скорость велосипедиста. Через 1 ч 24 мин, что составляет 1,4 ч, пешеход прошел расстояние $1,4x$ км, а еще через 1 ч расстояние между пешеходом и велосипедистом было равно 2,4 км. Велосипедист за 1 ч проехал y км. Расстояние между пешеходом и велосипедистом стало равным $2,4x - y = 1$. Расстояние, пройденное пешеходом за $(1,4 + 1 + 1)$ ч, равно $3,4x$, ему осталось пройти $(27 - 3,4x)$ км. Велосипедист за 2 ч пути проехал $2y$ км, ему осталось проехать $(27 - 2y)$ км. Известно, что пешеходу осталось до B в 2 раза больше, чем велосипедисту, составим уравнение $27 - 3,4x = 2(27 - 2y)$. Получили систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2,4x - y = 1, \\ 27 - 3,4x = 2(27 - 2y). \end{cases}$$

Решив систему, найдем ответ: 5 км/ч и 11 км/ч.

585. Совет. Воспользуйтесь тем, что в случае равновесия произведения масс на соответствующие им плечи рычагов должны быть равными.

Решение. 2) Пусть длина меньшего плеча рычага x м, а большего — y м. Тогда $500x = 400y$. При уменьшении большего груза соответствующее ему плечо увеличивается на 3 м, а другое плечо на столько же уменьшается. Тогда $(500 - 200)(x + 3) = 400(y - 3)$. Получаем систему:

$$\begin{cases} 500x = 400y, \\ 300(x + 3) = 400(y - 3); \end{cases} \quad \begin{cases} 5x - 4y = 0, \\ 3x - 4y = -21, \end{cases} \quad \begin{matrix} 2x = 21, \\ x = 10,5; \\ 4y = 5 \cdot 10,5, \\ y = 13,125. \end{matrix}$$

Ответ: 10,5 м; 13,125 м.

586. Решение. 1) Минутная стрелка за 60 мин поворачивается на угол 360° , следовательно, ее угловая скорость равна $360 : 60 = 6$ (град/мин). Часовая стрелка за 12 ч поворачивается на 360° , следовательно, ее угловая скорость равна $360 : 12 = 30$ град/ч = 0,5 град/мин. В 8 ч 30 мин угол между стрелками был равен 75° . Найдем время, за которое минутная стрелка догонит часовую: $\frac{75}{6 - 0,5} = \frac{75}{5,5} = \frac{150}{11} =$

$$= 13 \frac{7}{11} \text{ (мин)} \approx 13 \text{ мин } 38 \text{ с. Ответ: в } 8 \text{ ч } 43 \text{ мин } 38 \text{ с.}$$

2) В 9 ч 30 мин угол между стрелками на $7,5^\circ$ меньше развернутого. За минуту угол между стрелками изменяется на $5,5^\circ$. Значит, на $7,5^\circ$ угол между стрелками увеличится через $7,5 : 5,5 = \frac{75}{55} = \frac{15}{11}$ (мин) = $1 \frac{4}{11}$ (мин) ≈ 1 мин 22 с.

587. Решение. Выберем единицу длины так, чтобы расстояние между пристанями стало равно 48 таким единицам. Тогда скорость теплохода по течению будет равна $48 : 6 = 8$ (ед./ч), а против течения — $48 : 8 = 6$ (ед./ч). Скорость теплохода по течению отличается от его скорости против течения реки на удвоенную скорость течения реки, значит, скорость течения равна $(8 - 6) : 2 = 1$ (ед./ч). Время, которое потребуется плоту, равно $48 : 1 = 48$ (ч). Ответ: 48 ч.

594. Решение.

Арифметический способ. Арифметический способ решения основан на делимости. Из условия следует, что возраст Диофанта (натуральное число) кратен 12 и 7. Наименьшее число $12 \cdot 7 = 84$, а следующее число 168 невероятно в качестве возраста.

Алгебраический способ. Обозначив буквой x возраст Дифанта, переведем на математический язык надгробную надпись: $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$. Решив уравнение, найдем $x = 84$.

Практикум по решению текстовых задач

1, 2, 3. Совет. При сравнении чисел a и b , если известно, что a больше b на c , то это условие можно записать в виде равенства $a - b = c$.

4, 5, 6. Совет. При сравнении чисел a и b , если известно, что a больше b в k раз, то это условие можно записать в виде равенства $a = bk$.

7, 8, 9. Совет. Чтобы определить, сколько процентов (p) составляет число a от числа b , нужно умножить частное $a : b$ на 100% . $p\% = \frac{a}{b} \cdot 100\%$.

СПРАВОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Пропорции

В пропорции $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ числа a и d называют крайними членами, b и c — средними.

Основное свойство пропорции: произведение крайних членов равно произведению средних, т. е.

$$ad = bc.$$

Действия со степенями

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Формулы сокращенного умножения

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \qquad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

Формулы комбинаторики

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad 1! = 0! = 1$$

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Таблица простых чисел первой тысячи

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	ИЗ	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Квадраты и кубы однозначных чисел

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81
a^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Таблица квадратов двузначных чисел

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Латинский алфавит

Aa	Bb	Cc	Dd	Ee	Ff	Gg	Hh	Ii	Jj	Kk	Ll	Mm
а	бэ	цэ	дэ	е	эф	же	аш	и	жи	ка	эл	эм
Nn	Oo	Pp	Qq	Rr	Ss	Tt	Uu	Vv	Ww	Xx	Yy	Zz
эн	о	пэ	ку	эр	эс	тэ	у	вэ	дубль- вэ	икс	иг- рек	зэт

Законы арифметических действий

Переместительный закон сложения $a + b = b + a$	Переместительный закон умножения $a \cdot b = b \cdot a$
Сочетательный закон сложения $(a + b) + c = a + (b + c)$	Сочетательный закон умножения $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Распределительный закон умножения относительно сложения $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ Распределительный закон умножения относительно вычитания $(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$	

Таблица плотностей

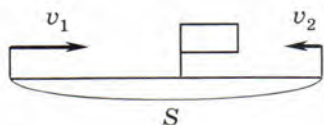
Вещество	кг/м ³	г/см ³	Вещество	кг/м ³	г/см ³
Алмаз	3515	3,5	Бензин	710	0,71
Алюминий	2700	2,7	Вода морская	1030	1,03
Железо	7874	7,9	Керосин	805	0,805
Золото	19 320	19,3	Масло растительное	940	0,94
Кирпич	1500	1,5	Серная кислота (конц.)	1800	1,8
Латунь	8600	8,6	Ртуть	13 600	13,6
Медь	8960	8,9	Соляная кислота (20% -я)	1100	1,1
Олово	7300	7,3			
Платина	21 450	21,4			
Свинец	11 350	11,3			
Серебро	10 500	10,5			
Стекло	2500	2,5			
Цинк	7140	7,1			
Чугун	7400	7,4			

Значения некоторых астрономических величин

	Радиус, м	Масса, кг	Среднее расстояние от Земли, м
Земля	$6,37 \cdot 10^6$	$5,97 \cdot 10^{24}$	—
Солнце	$6,96 \cdot 10^8$	$1,99 \cdot 10^{30}$	$1,49 \cdot 10^{11}$
Луна	$1,74 \cdot 10^6$	$7,35 \cdot 10^{22}$	$3,84 \cdot 10^8$

Схемы для задач на совместное движение

1. Встречное движение



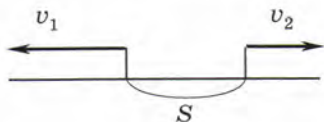
Скорость сближения

$$v_{\text{сбл}} = v_1 + v_2.$$

Время сближения

$$t_{\text{сбл}} = \frac{S}{v_1 + v_2}.$$

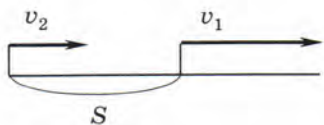
2. Движение в противоположных направлениях



Скорость удаления

$$v_{\text{уд}} = v_1 + v_2.$$

3. Движение с отставанием

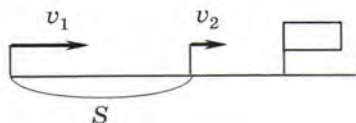


Скорость

удаления

$$v_{\text{уд}} = v_1 - v_2.$$

4. Движение вдогонку



Скорость сближения

$$v_{\text{сбл}} = v_1 - v_2.$$

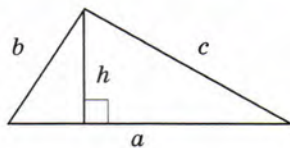
Время сближения

$$t_{\text{сбл}} = \frac{S}{v_1 - v_2}.$$

Площади геометрических фигур

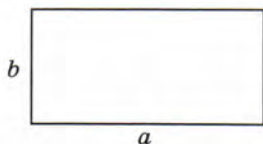
1. Треугольник

$$S = \frac{1}{2}ah$$



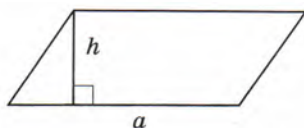
2. Прямоугольник

$$S = ab$$



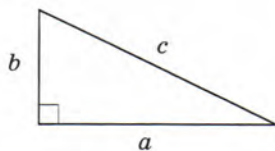
3. Параллелограмм

$$S = ah$$



Теорема Пифагора

$$c^2 = a^2 + b^2$$



СПИСОК ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

- Алгебра. 7—9 класс (DVD-BOX). — М.: Просвещение-Медиа, 2003.
- Александрова Н. В.* История математических терминов, понятий, обозначений: словарь-справочник. — М.: ЛКИ, 2008.
- Балаян Э. Н.* Готовимся к олимпиадам по математике. 5—11 классы. — М.: Феникс, 2009.
- Бегунц А. В., Бородин П. А., Сергеев И. Н.* Олимпиада МГУ «Ломоносов» по математике. 2005—2008. Для 8—10 классов. — М.: МЦНМО, 2009.
- Виртуальный наставник: Алгебра. 7—9 классы (CD-ROM). — М.: Тригон; Новая школа, 2009.
- Гольдич В. А.* 3000 задач по алгебре. 7—11 классы. — М.: Эксмо, 2008.
- Завяич Л. И., Рязановский А. Р.* Алгебра в таблицах. 7—11 классы. — М.: Дрофа, 2009.
- Завяич Л. И., Рязановский А. Р.* Геометрия в таблицах. 7—11 классы. — М.: Дрофа, 2009.
- Иллюстративный словарь: Математика. — М.: АСТ; Астрель, 2007.
- Иллюстрированный энциклопедический атлас по математике. — М.: Олма-Пресс Экслибрис, 2004.
- Коликов А. Ф., Коликов А. В.* Изобретательность в вычислениях. — М.: Дрофа, 2008.
- Математика. Большой справочник для школьников и поступающих в вузы. — М.: Дрофа, 2009.
- Математика в формулах. 5—11 классы. — М.: Дрофа, 2009.
- Математика. 5—11 классы. Практикум (CD-ROM). — М.: Дрофа, 2008.

Нагибин Ф. Ф., Канин Е. С. Математическая шкатулка: пособие для учащихся. — М.: Дрофа, 2006.

Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К. Задачи на смекалку. — М.: Дрофа, 2006.

Новейший полный справочник школьника. 5—11 классы: Математика. — М.: Эксмо, 2008.

Олехник С. Н., Нестеренко Ю. В., Потапов М. К. Старинные занимательные задачи. — М.: Дрофа, 2006.

Перельман Я. И. Занимательная алгебра. — М.: Терра-Книжный клуб, 2008.

Попов Г. Н. Сборник исторических задач по элементарной математике. — М.: ДомКнига, 2006.

Попов Г. Н. Очерки по истории математики. — М.: Либроком, 2009.

Рубинштейн А. И. Связующая нить. Неизвестная математика. — М.: Дрофа, 2009.

Слонимский Л. И. Алгебра. 7—9 классы (CD-ROM). — М.: АСТ; Астрель, 2008.

Толпыго А. К. Тысяча задач Международного математического турнира городов. — М.: МЦНМО, 2009.

Тонких А. П. Математика. Районные олимпиады школьников. 8—11 классы. — М.: Дрофа, 2008.

Фарков А. В. Математические олимпиады. — М.: Экзамен, 2009.

Фенько Л. М. Метод интервалов в решении неравенств и исследовании функций. 8—11 классы. — М.: Дрофа, 2007.

Шарыгин И. Ф. Математический винегрет. — М.: Мир, 2002.

Шевкин А. В. Школьная олимпиада по математике. Задачи и решения. — М.: Илекса, 2008.

Энциклопедический словарь юного математика. — М.: Педагогика, 1989.

Интересная информация в Интернете на сайтах:

<http://www.edu.ru/moodle/> — Государственная итоговая аттестация выпускников 9 классов

<http://school-collection.edu.ru/> — Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов

<http://www.turgor.ru/> — Международный математический турнир городов

<http://math.rusolymp.ru/> — Всероссийская олимпиада школьников по математике

<http://www.kenguru.sp.ru/> — Российская страница международного математического конкурса «Кенгуру»

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебра 5
- Алгебраическая дробь 111
- Аргумент функции 53
- Арифметика 175
- Вероятность события 158, 160
- Выделение полного квадрата 141
- Вынесение общего множителя за скобки 126
- Выражение с переменной 20
 - числовое 7
- Выражения тождественно равные 94
- Высказывание 36
- График
 - уравнения 86
 - функции 58
- Действия со степенями 277
- Допустимые значения
 - аргумента 53
 - переменной 20
- Законы арифметических действий 94, 280
- Значение выражения 7
 - функции 53
- Квадрат разности 140
 - суммы 140
- Комбинаторика 168
- Контрпример 13
- Коэффициент
 - одночлена 108
 - пропорциональности 66
- Латинский алфавит 279
- Линейная функция 76
- Линейное уравнение 86, 199
- Математическая модель 28
- Метод исключения переменной 45
- Микрокалькулятор 9
- Многочлен 116
 - стандартного вида 116
- Множество истинности 37
- Модуль числа 15
- Неравенство 14
- Одночлен 108
 - стандартного вида 108
- Основание степени 98
- Основное свойство
 - дроби 111
 - пропорции 277
 - степени 103
- Парадокс 155
- Площади геометрических фигур 282

Подобные одночлены 109
Показатель степени 98
Правила раскрытия скобок 118
Правило произведения 164
Приведение подобных членов 109
Пропорциональные переменные 66
Равенство 14
Равновероятные возможности 155
Равносильные предложения 37
— системы 46
— уравнения 37
Разложение многочлена на множители 126, 135, 150
Разность квадратов 140
Решение уравнения 39
— системы уравнений 45
Свойства степени 103
Система уравнений 45
Событие достоверное 158
— невозможное 158
Сокращение дробей 111
Способ сложения 47
Стандартный вид
— многочлена 116
— одночлена 108

Степень 98
— многочлена 117
— одночлена 108
Схемы движений 281
Таблица
— квадратов двузначных чисел 279
— плотностей 280
— простых чисел 278
— с двумя входами 57
Теорема Пифагора 282
Тождество 93, 194
Тождественное преобразование 95
Угловой коэффициент прямой 72
Факториал 165, 166
Формула числа
— перестановок 165
— размещений 166
— сочетаний 166, 167
Формулы
— комбинаторики 277
— сокращенного умножения 139, 140, 194, 277
Функция 53, 182
— линейная 76
Число перестановок 165
— размещений 166
— сочетаний 166, 167
Член многочлена 116

Учебное издание

Муравин Георгий Константинович
Муравин Константин Соломонович
Муравина Ольга Викторовна

АЛГЕБРА

7 класс

Учебник

для общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией О. В. Муравина

Редактор Т. С. Зельдман

Художественный редактор А. В. Шувалова

Технический редактор И. В. Грибкова

Компьютерная верстка С. Л. Мамедова

Корректор Г. И. Мосякина

В соответствии с Федеральным законом от 29.12.2010 г. № 436-ФЗ
знак информационной продукции на данное издание не ставится

Сертификат соответствия
№ РОСС RU. АЕ51. Н 16238.



Подписано к печати 17.04.13. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 18,0.
Тираж 1500 экз. Заказ № 2935.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сушеvский вал, 49.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги
просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»:
127018, Москва, а/я 79. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа»
обращаться по адресу: 127018, Москва, Сушеvский вал, 49.
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Сайт ООО «Дрофа»: www.drofa.ru

Электронная почта: sales@drofa.ru

Тел.: 8-800-200-05-50 (звонок по России бесплатный)



Отпечатано в ОАО «Можайский полиграфический комбинат»

143200, г. Можайск, ул. Мира, 93

www.oaomprk.ru, www.оломнк.рф тел.: (495) 745-84-28, (49638) 20-685